Devoir Surveillé

Durée 1H

Exercice 1 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}^+$, *on pose :* $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1.$

1. *Montrer que l'équation* $P_n(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha_n \in \left]0, +\infty\right[$.
2. *Montrer que la suite* $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ *est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.*
3. *Montrer que :* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on considère la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = x^3 + nx - 1.$

1. *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* x_n *dans l'intervalle* $\left]0, 1\right[$.
2. **a)** *Montrer que la suite* $(x_n)_{n \geq 1}$ *est décroissante.*
   b) *En déduire que la suite* $(x_n)_{n \geq 1}$ *est convergente.*
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < \dfrac{1}{n}$. *Déterminer la limite de la suite* $(x_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 3 .

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ *et* $(w_n)_{n \geq 1}$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ , \quad v_n = u_n - 2\sqrt{n+1} \quad et \quad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n \geq 1}$ *est croissante et que la suite* $(w_n)_{n \geq 1}$ *est décroissante.*
2. *Montrer que les suites* $(v_n)_{n \geq 1}$ *et* $(w_n)_{n \geq 1}$ *sont adjacentes.*
3. *En déduire la limite de la suite* $(u_n)_{n \geq 1}$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com