Professeur : Yahya MATIOUI

Devoir Maison N1

Exercice 1 (*Les deux questions sont indépendantes*)

1. *On considère les deux assertions :*

$$P : \left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), x \geq 2\sqrt{x} - 1 \text{ et } Q : (\forall y \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R}), xy \neq x.$$

a) *Donner la négation de P et Q.*

b) *Montrer que P est vraie et Q est fausse.*

2. *Donner la négation des assertions suivantes :*

$R : (\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists k \in \mathbb{Z}),\ k \leq x < x+1$ *et* $F : \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha - \beta > 1 \implies \exists n \in \mathbb{Z}, \alpha < n < \beta)$

Exercice 2 (*Les questions sont indépendantes*)

1. *Montrer que :* $\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2,\ a^2 = b+1 \implies \dfrac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}} = 1.$

2. *Montrer par la contraposée que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \implies \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}.$

3. *Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que :* $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{4}{3}\sqrt{x}.$

4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :* $\sqrt{4n^2+5n+3} \notin \mathbb{N}.$

Exercice 3 .(*Les questions sont indépendantes*)

1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :* $(I) : \sqrt{x-1} \geq x - 7.$

2. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{4} > 0.$ $\left(\text{\textit{Étudier}} : x \leq 0,\ 0 < x < 1 \text{ et } x \geq 1\right).$

3. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2.$

Exercice 4 .

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{(|x|-2)|x|}\ ,\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x+2}} & , \text{ si } x \leq 1 \\[2ex] f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}\ , & \text{ si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+m}\ , (m \text{ est un paramètr}$$

FIN