www.etude-generale.com 2 BAC SM
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices sur les suites numériques N2

Exercice 1 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par :* $(\forall x \in [0,1])\,,\; f_n(x) = x^n + x - 1.$

1. *La fonction* f_n *est dérivable sur* $[0,1]$ *car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur* $[0,1]$.

$$(\forall x \in [0,1])\,,\;\; f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$$

puisque : $nx^n + 1 > 0$ *donc*

$$(\forall x \in [0,1])\,, f_n'(x) > 0$$

D'où la fonction f_n *est strictement croissante sur* $[0,1]$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	1

2. *Montrons que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha_n \in \left]0,1\right[$.

- ♣ *La fonction* f_n *est continue sur* $[0,1]$ *car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur* $[0,1]$.
- ♣ *La fonction* f_n *est strictement croissante sur* $[0,1]$.
- ♣ *On a* $f_n(0) = -1$ *et* $f_n(1) = 1$ *alors* $f_n(0) \times f_n(1) < 0$.

Donc d'après le T.V.I l'équation $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* α_n *dans* $\left]0,1\right[$.
Autrement dit :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists! \alpha_n \in \left]0,1\right[)\,,\;\; f_n(\alpha_n) = 0.$$

3. *Montrons que la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \left]0,1\right[$. *On a*

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} + x - 1 - (x^n + x - 1) \\ &= x^{n+1} - x^n \\ &= x^n (x-1) \end{aligned}$$

comme $x^n(x-1)<0$, *alors* $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ *donc*

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad (\forall x\in]0,1[)\,,\ f_{n+1}(x)<f_n(x)$$

En évaluans cette inégalité en $x=\alpha_n$, *alors on obtient* $f_{n+1}(\alpha_n)<f_n(\alpha_n)$ *et comme* $f_n(\alpha_n)=0$ *alors* $f_{n+1}(\alpha_n)<0$, *puisque* $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$, *alors* $f_{n+1}(\alpha_n)<f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. *Comme la fonction* f_{n+1} *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *alors d'après le théorème de la bijection la fonction* f_{n+1}^{-1} *est de même monotonie que* f_{n+1} *.On en déduit que*

$$\alpha_n=f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_n))<f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_{n+1}))=\alpha_{n+1}$$

Donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante.*

La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée par* 1 *et comme elle est croissante alors* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* ℓ. $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\alpha_n=\ell\right)$. *D'autre part, comme* $0<\alpha_n<1$ *alors par passage à la limite on obtient*: $0\leq\ell\leq1$.

Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\ \alpha_n\leq\ell$.

On suppose par l'absurde qu'il existe un rang $N>0$ *tel que :* $\alpha_N>\ell$. *La suite* (α_n) *étant croissante, on a pour tout* $n\geq N:\alpha_n\geq\alpha_N$. *Par passage à la limite on en déduit que :* $\ell\geq\alpha_N$. *Donc* $\ell>\ell$, *ce qui est impossible.*

Donc

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,0<\alpha_n\leq\ell$$

On suppose par l'absurde que $\ell\neq1$ *c'est-à-dire* $0\leq\ell<1$.

On a

$$f_n(\alpha_n)=0\iff\alpha_n^n+\alpha_n-1=0\iff\alpha_n=1-\alpha_n^n\qquad(\spadesuit)$$

et comme $0<\alpha_n\leq\ell$ *alors* $0<\alpha_n^n\leq\ell^n$. *Or* $\ell^n\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$. *Car* $0\leq\ell<1$. *Ainsi par le théorème d'encadrement, on a :* $\alpha_n^n\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$.

Or par passage à la limite dans $(\spadesuit)$ *on obtient :* $\ell=1$. *Ceci contredit l'hypothèse* $\ell\neq1$.
Donc

$$\ell=1$$

Exercice 2 .

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,,\ f_n(x)=x^n+\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1. *Montrons que l'équation* $f_n(x)=1$ *admet une solution unique* $\alpha_n\in\mathbb{R}^+$.

   On considère la fonction φ_n *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $\varphi_n(x)=x^n-1+\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

   ♣ *La fonction* $u\ :\ x\longmapsto x^n-1$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *comme la restriction d'une fonction polynôme sur* $\mathbb{R}^+$ *et la fonction* $v\ :\ x\longmapsto\dfrac{x}{n}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et comme* $v(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}$ *et puisque la fonction* arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$ *alors la fonction* $\arctan\circ v$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$. *Donc la fonction* φ_n *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *comme la somme de deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}^+$.

♣ *Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que : $x < y$.*

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow \frac{x}{n} < \frac{y}{n} \\ &\Longrightarrow \arctan\left(\frac{x}{n}\right) < \arctan\left(\frac{y}{n}\right) \\ &\Longrightarrow \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + x^n - 1 < \arctan\left(\frac{y}{n}\right) + y^n - 1 \\ &\Longrightarrow \varphi_n(x) < \varphi_n(y) \end{aligned}$$

donc la fonction φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc d'après le théorème de la bijection la fonction φ_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\varphi_n(\mathbb{R}^+) = \left[\varphi_n(0), \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \varphi_n(x)\right[= [-1, +\infty[$, et comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors il existe unique α_n dans $\mathbb{R}^+$ tel que : $\varphi_n(\alpha_n) = 0$. Autrement dit :

$$\left(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^+\right), \varphi_n(\alpha_n) = 0$$

Or $\varphi_n(\alpha_n) = 0$ c'est équivaut à : $f_n(\alpha_n) = 1$.
Par suite

$$\left(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^+\right), f_n(\alpha_n) = 1$$

2. .

♣ *Montrons que : $0 < \alpha_n < 1$.*

On a $\varphi_n(0) = -1$, $\varphi_n(\alpha_n) = 0$ et $\varphi_n(1) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ donc

$$\varphi_n(0) < \varphi_n(\alpha_n) < \varphi_n(1)$$

comme la fonction φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors d'après le théorème de la bijection $\varphi_n^{-1} : [-1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est de même monotonie que φ_n. Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \ 0 < \alpha_n < 1.$$

♣ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$.*

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} - x^n + \arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= x^n(x-1) + \left(\arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

comme $x^n(x-1) < 0$ et $\arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right) < 0$, alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ donc

$$(\forall x \in]0, 1[), \ f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

3. *On a :* $(\forall x \in]0,1[)\,,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$ *et comme* $\varphi_n(x) = x^n - 1 + \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$. *Donc*

$$(\forall x \in]0,1[)\,,\quad \varphi_{n+1}(x) < \varphi_n(x)$$

En évaluans cette inégalité en $x = \alpha_n$, *alors on obtient* $\varphi_{n+1}(\alpha_n) < \varphi_n(\alpha_n)$ *et comme* $\varphi_n(\alpha_n) = 0$ *alors* $\varphi_{n+1}(\alpha_n) < 0$, *puisque* $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, *alors* $\varphi_{n+1}(\alpha_n) < \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})$. *Comme* φ_{n+1} *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$, *alors d'après le théorème de la bijection la fonction* φ_{n+1}^{-1} *est de même monotonie que* φ_{n+1}. *On en déduit que*

$$\alpha_n = \varphi_{n+1}^{-1}\left(\varphi_{n+1}(\alpha_n)\right) < \varphi_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(\alpha_{n+1})\right) = \alpha_{n+1}$$

Donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante.*
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est majorée par* 1 *et comme elle est croissante alors* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* ℓ. $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = \ell\right)$. *Dautre part, comme* $0 < \alpha_n < 1$ *alors par passage à la limite on obtient:* $0 \leq \ell \leq 1$.

4. *On suppose par l'absurde que* $\ell \neq 1$. *C'est-à-dire* $0 \leq \ell < 1$.
On a

$$f(\alpha_n) = 1 \iff \arctan\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1 - \alpha_n^n \quad (\spadesuit)$$

et comme $0 < \alpha_n \leq \ell$ *alors* $0 < \alpha_n^n \leq \ell^n$. *Or* $\ell^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. *Car* $0 \leq \ell < 1$. *Ainsi par le théorème d'encadrement, on a :* $\alpha_n^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. *D'autre part, on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = \ell$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$ *et comme la fonction* arctan *est continue en* 0 *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \arctan\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 0$. *Or par passage à la limite dans* $(\spadesuit)$ *on obtient :* $0 = 1$. *Ce qui est absurde. Donc*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = 1.$$

Exercice 3 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) + 2x - 1$.

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^+)\,,\ f_n(\alpha_n) = 0$.

♣ *La fonction* $u : x \longmapsto 2x - 1$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *comme la restriction d'une fonction polynôme sur* $\mathbb{R}^+$ *et la fonction* $v : x \longmapsto \dfrac{x}{n}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et comme* $v(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}$ *et puisque la fonction* arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$ *alors la fonction* $\arctan \circ v$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$. *Donc la fonction* f_n *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *comme la somme de deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}^+$.

♣ *Soit* x *et* y *deux éléments de* $\mathbb{R}^+$ *tels que :* $x < y$.

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow \frac{x}{n} < \frac{y}{n} \\ &\Longrightarrow \arctan\left(\frac{x}{n}\right) < \arctan\left(\frac{y}{n}\right) \\ &\Longrightarrow \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1 < \arctan\left(\frac{y}{n}\right) + 2y - 1 \\ &\Longrightarrow f_n(x) < f_n(y) \end{aligned}$$

donc la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc d'après le théorème de la bijection la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f_n(\mathbb{R}^+) = \left[f_n(0), \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_n(x) \right[= [-1, +\infty[$, et comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors il existe unique α_n dans $\mathbb{R}^+$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$. Autrement dit :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}^+\right), \ f_n(\alpha_n) = 0.$$

2. *Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}^+), \ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
   On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \left(\arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) + 2x - 1\right) - \left(\arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1\right) \\ &= \arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

   comme : $\arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \leq 0$, *alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), \ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

3. .

♣ *La montonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*
On a

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), \ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

En évaluans cette inégalité en $x = \alpha_n$, alors on obtient $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n)$ et comme $f_n(\alpha_n) = 0$ alors $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$, puisque $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, alors $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors d'après le théorème de la bijection la fonction f_{n+1}^{-1} est de même monotonie que f_{n+1} .On en déduit que

$$\alpha_n = f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_n)) \leq f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_{n+1})) = \alpha_{n+1}$$

Donc la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

♣ *On a $f_n(0) = -1$, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f_n(\alpha_n) = 0$ donc*

$$f_n(0) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors d'après le théorème de la bijection $f_n^{-1} : [-1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est de même monotonie que f_n. Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \ 0 < \alpha_n < \frac{1}{2}$$

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 et comme elle est croissante alors $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est converge vers ℓ. $\left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \ell\right)$.

4. .

♣ *Calculons* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$ *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$.

♣ *Déduire :* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n$:

On a

$$\begin{aligned} f_n(\alpha_n) &= 0 \iff \arctan\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) + 2\alpha_n - 1 = 0 \\ &\iff \alpha_n = \frac{1 - \arctan\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)}{2} \end{aligned}$$

comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$ *et puisque la fonction* $\arctan$ *est continue en* 0 *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \arctan\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 0$. *Donc*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 - \arctan\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)}{2} = \frac{1}{2}.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com