Correction de la série d'exercices sur les ensembles

Exercice 1 .

Calculons A et B.

■

$$\begin{aligned}
A &= \left(3-\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{3}\right)+\left(6-\frac{2}{15}\right)\left(4-\frac{7}{5}+\frac{2}{3}\right) \\
&= \left(\frac{3\times 15}{1\times 15}-\frac{1\times 3}{5\times 3}-\frac{4\times 5}{3\times 5}\right)\left(\frac{15}{3}\right)+\left(\frac{6\times 15}{15}-\frac{2}{15}\right)\left(\frac{4\times 15}{15}-\frac{7\times 3}{5\times 3}+\frac{2\times 5}{3\times 5}\right) \\
&= \left(\frac{45}{15}-\frac{3}{15}-\frac{20}{15}\right)\left(\frac{15}{3}\right)+\left(\frac{90}{15}-\frac{2}{15}\right)\left(\frac{60}{15}-\frac{21}{15}+\frac{10}{15}\right) \\
&= \frac{22}{15}\times\frac{15}{3}+\frac{88}{15}\times\frac{49}{15} \\
&= \frac{22}{3}+\frac{4312}{225} \\
&= \frac{22\times 75}{225}+\frac{4312}{225} \\
&= \frac{5962}{225}
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2+\frac{1}{4}}{3-\frac{1}{4}}\times\frac{1+\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}-2}\times\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{2-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{11}{4}}\times\frac{\frac{7}{5}}{\frac{-6}{5}}\times\frac{\frac{3}{6}}{\frac{11}{6}} \\
&= \frac{9}{4}\times\frac{4}{11}\times\frac{7}{5}\times\frac{5}{-6}\times\frac{3}{6}\times\frac{6}{11} \\
&= \frac{9\times 7\times 3}{11\times(-6)\times 11} \\
&= \frac{9\times 7}{-242}=-\frac{63}{242}
\end{aligned}$$

Exercice 2 .

1. *Vérifions que :* $\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\left(\sqrt{3}+1\right)^2=4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

■

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 &= 3-2\sqrt{3}+1\\ &= 4-2\sqrt{3}\\ &= 4\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)\\ &= 4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 &= 3+2\sqrt{3}+1\\ &= 4+2\sqrt{3}\\ &= 4\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)\\ &= 4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

2. *On déduit que :* $A+B=3$.

On a $A=1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ *et* $B=1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. *D'autre part, on sait que*

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^2=4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad et \quad \left(\sqrt{3}-1\right)^2=4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

alors

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4} \quad et \quad 1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}$$

donc

$$\begin{aligned}A+B &= 1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= 2+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}}\\ &= 2+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}-\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\\ &= 2+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\\ &= 2+\frac{2}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

3. .

- *Montrons que :* $(A-1)(B-1)=\dfrac{-1}{2}$.

$$\begin{aligned}
(A-1)(B-1) &= \left(1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\right)\\
&= -\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&= -\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\\
&= -\sqrt{1-\frac{3}{4}}\\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

- *On déduit la valeur de* AB.

  On a

$$\begin{aligned}
(A-1)(B-1) &= -\frac{1}{2}\\
\text{Éq} &: \quad AB-A-B+1=-\frac{1}{2}\\
\text{Éq} &: \quad AB=-\frac{1}{2}-1+\underbrace{A+B}_{=3}\\
\text{Éq} &: \quad AB=\frac{-1}{2}-1+3\\
\text{Éq} &: \quad AB=\frac{-1}{2}+2\\
\text{Éq} &: \quad AB=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 3 .

Simplifions les expressions :

■

$$\begin{aligned}
A &= \frac{7 \times (0,01)^3 \times 0,6^2}{12^2 \times 100^2 \times 25^{-1}} \\
&= \frac{7 \times (10^{-2})^3 \times (6 \times 10^{-1})^2}{(6 \times 2)^2 \times (10^2)^2 \times (5^2)^{-1}} \\
&= \frac{7 \times 10^{-6} \times 6^2 \times 10^{-2}}{6^2 \times 2^2 \times 10^4 \times 5^{-2}} \\
&= \frac{7 \times 10^{-8}}{2^2 \times 10^4 \times 5^{-2}} \\
&= \frac{7 \times 10^{-12}}{2^2 \times 5^{-2}} \\
&= \frac{7 \times 2^{-12} \times 5^{-12}}{2^2 \times 5^{-2}} \\
&= 7 \times \frac{2^{-12}}{2^2} \times \frac{5^{-12}}{5^{-2}} \\
&= 7 \times 2^{-14} \times 5^{-10}
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
B &= \frac{0,0001^2 \times (-0,02)^3}{(1000^{-1})^4 \times (800^2)^3} \\
&= \frac{(10^{-4})^2 \times (-2 \times 10^{-2})^3}{(10^{-3})^4 \times \left((8 \times 10)^2\right)^3} \\
&= \frac{10^{-8} \times \left((-2)^3 \times 10^{-6}\right)}{10^{-12} \times 8^3 \times 10^6} \\
&= \frac{10^{-8} \times 10^{-6} \times (-8)}{10^{-12} \times 10^6 \times 8^3} \\
&= -\frac{10^{-14+6}}{8^2} \\
&= -\frac{10^{-8}}{8^2} \\
&= \frac{2^{-8} \times 5^{-8}}{(2^3)^2} \\
&= \frac{2^{-8} \times 5^{-8}}{2^6} \\
&= 2^{-8-6} \times 5^{-8} \\
&= 2^{-14} \times 5^{-8}
\end{aligned}$$

Exercice 4 .

Soit a un réel non nul. On pose $A = a + \frac{1}{a}$.

■ *Calculons en fonction en A l'expression $a^2 + \frac{1}{a^2}$.*

On a

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 &= a^2+2+\frac{1}{a^2}\\ &= a^2+\frac{1}{a^2}+2\end{aligned}$$

alors

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\Bigg(\underbrace{a+\frac{1}{a}}_{=A}\Bigg)^2-2=A^2-2$$

donc

$$a^2+\frac{1}{a^2}=A^2-2$$

■ *Calculons en fonction en A l'expression* $a^3+\frac{1}{a^3}$.

On a

$$\begin{aligned}a^3+\frac{1}{a^3} &= a^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3\\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)\\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}-1\right)\\ &= A\left(A^2-2-1\right)\\ &= A\left(A^2-3\right)\end{aligned}$$

donc

$$a^3+\frac{1}{a^3}=A\left(A^2-3\right)$$

Exercice 5 .

Soit a un réel tels que : $a\neq -1$ *et* $a\neq 1$.

Simplifions A.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8} \\
&= \frac{1+a-(1-a)}{1-a^2} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8} \\
&= \frac{2a}{1-a^2} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8} \\
&= \frac{2a\,(1+a^2) - 2a\,(1-a^2)}{1-a^4} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8} \\
&= \frac{4a^3}{1-a^4} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8} \\
&= \frac{8a^7}{1-a^8} - \frac{8a^7}{1+a^8} \\
&= \frac{16a^{15}}{1-a^{16}}
\end{aligned}$$

Exercice 6 *.*

Factorisons les expressions A, B et C.

■

$$\begin{aligned}
A &= x^{12} - 2x^6 + 1 \\
&= \left(x^6\right)^2 - 2x^6 + 1 \\
&= \left(x^6 - 1\right)^2
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
B &= 16x^2 - 8x + 1 \\
&= (4x)^2 - 2 \times 4x + 1 \\
&= (4x-1)^2
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
C &= x^5 + x^3 - x^2 - 1 \\
&= x^3 - 1 + x^5 - x^2 \\
&= (x-1)\left(x^2+x+1\right) + x^2\left(x^3-1\right) \\
&= (x-1)\left(x^2+x+1\right) + x^2\,(x-1)\left(x^2+x+1\right) \\
&= (x-1)\left[\left(x^2+x+1\right)\left(1+x^2\right)\right] \\
&= (x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 7 *.*

1. *Simplifions le nombre* $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ *sous la forme d'une fraction.*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\
&= \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{7-3}\\
&= \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Comme $4 \in \mathbb{Q}$*, donc l'écriture fractionnaire* $\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{4}$ *a pour dénominateur un nombre rationnel.*

2. *Simplifions le nombre* $\sqrt{\dfrac{\sqrt{112}+\sqrt{48}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sqrt{112}+\sqrt{48}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{16\times 7}+\sqrt{16\times 3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}\\
&= \sqrt{\frac{4\sqrt{7}+4\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}\\
&= \sqrt{\frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}\\
&= \sqrt{4\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)}\\
&= \sqrt{4\times\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}{4}}\\
&= \sqrt{7}+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exercice 8 .

Soient a *et* b *deux réels tels que :* $0 < b \leq a$.

On pose :

$$A = \sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$

1. *Calculons A^2.*

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & \left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 \\ & = & \left(a+\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}+a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \\ & = & 2a+2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)} \\ & = & 2a+2\sqrt{a^2-a^2+b^2} \\ & = & 2a+2\sqrt{b^2} \\ & = & 2a+2b \\ & = & 2\,(a+b)\,. \end{array}$$

2. *On déduit une écriture simplifiée pour A.*

   On a $A>0$, et comme $A^2=2\,(a+b)$ alors

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & 2\,(a+b) \\ \acute{E}q & : & \sqrt{A^2}=\sqrt{a+b} \\ \acute{E}q & : & A=\sqrt{2\,(a+b)} \end{array}$$

   donc

$$A=\sqrt{2\,(a+b)}$$

3. *Calculons le nombre :* $\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}} & = & \sqrt{5+\sqrt{5^2-2^2}}+\sqrt{5-\sqrt{5^2-2^2}} \\ & = & \sqrt{2\,(5+2)} \\ & = & \sqrt{14} \end{array}$$

Exercice 9 .

On considère l'expression suivante :

$$A=\frac{x^3y-xy^3}{x+y}$$

1. *Calculons l'expression A pour $x = 3\sqrt{7}$ et $y = 4\sqrt{5}$.*

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x^3y - xy^3}{x+y} \\
&= \frac{\left(3\sqrt{7}\right)^3 \times 4\sqrt{5} - 3\sqrt{7} \times \left(4\sqrt{5}\right)^3}{3\sqrt{7} + 4\sqrt{5}} \\
&= \frac{189\sqrt{7} \times 4\sqrt{5} - 3\sqrt{7} \times 320\sqrt{5}}{3\sqrt{7} + 4\sqrt{5}} \\
&= \frac{756\sqrt{35} - 960\sqrt{35}}{3\sqrt{7} + 4\sqrt{5}} \\
&= \frac{-204\sqrt{35}\left(3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{7} + 4\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{-204\sqrt{35}\left(3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}\right)}{-17} \\
&= 12\sqrt{35}\left(3\sqrt{7} - 4\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

2. *Simplifions A.*

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x^3y - xy^3}{x+y} \\
&= \frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x+y} \\
&= \frac{xy(x-y)(x+y)}{x+y} \\
&= xy(x-y)
\end{aligned}$$

Exercice 10 .

1. *Montrons que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.*

   On va utiliser un raisonnement par l'absurde :

   Pour montrer que l'assertion P est vraie, le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que P est fausse et puis à aboutir à une contradiction.

   Application.

   On suppose par l'absurde que $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$.

   donc $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, par suite $2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$, c'est-à-dire $5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$, ce qui signifie que $2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} - 5$. Donc

$$\sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2} \in \mathbb{Q}.$$

C'est une contradiction car $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. *Donc*

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \notin \mathbb{Q}$$

Meme démarche pour démontrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11 .

1. *Soient* a, b, c *et* d *des réels quelconques.*

   On a

$$\begin{aligned}
\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-(ac+bd)^2 &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2ac.bd-b^2d^2 \\
&= a^2d^2-2ac.bd+b^2c^2 \\
&= (ad)^2-2ad.bc+(bc)^2 \\
&= (ad-bc)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

   comme $(ad-bc)^2 \geq 0$ *alors* $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 \geq 0$. *Donc*

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geq (ac+bd)^2$$

2. *Soit* $x, y \in [1, +\infty[$.

   On a

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2-(\sqrt{xy})^2 &= (\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-1}+\left(\sqrt{y-1}\right)^2-xy \\
&= x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1-xy \\
&= x-1+y-xy+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= x-1+y(1-x)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= (x-1)-y(x-1)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= (x-1)(1-y)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= -(x-1)(y-1)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= -\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}\right)^2+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= -\left(\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}\right)^2-2\sqrt{(x-1)(y-1)}\times 1+1^2\right) \\
&= -\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2
\end{aligned}$$

   comme : $-\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}+1\right)^2 \leq 0$ *pour tous* x *et* y *de* $[1, +\infty[$ *alors* $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2 - \left(\sqrt{xy}\right)^2 \leq 0$ *et puisque* $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \geq 0$ *et* $\sqrt{xy} \geq 0$. *Donc*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy} \quad \text{pour tous } x, y \in [1, +\infty[$$

Exercice 12 .

1. *Soient* a, b, c , x , y *et* z *des nombres réels.*

   On a

$$\begin{aligned}
& \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(ax+by+cz)^2 \\
= \; & (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2 \\
& -\left((ax+by)^2+2(ax+by)cz+(cz)^2\right) \\
= \; & (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2 \\
& -(ax+by)^2-2(ax+by)cz-(cz)^2 \\
= \; & (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2-(ax)^2-2axby- \\
& (by)^2-2axcz-2bycz-(cz)^2 \\
= \; & (ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2-2axby-2axcz-2bycz \\
= \; & \left((ay)^2-2axby+(bx)^2\right)+\left((az)^2-2axcz+(cx)^2\right)+\left((bz)^2-2bycz+(cy)^2\right) \\
= \; & \left((ay)^2-2aybx+(bx)^2\right)+\left((az)^2-2azcx+(cx)^2\right)+\left((bz)^2-2bzcy+(cy)^2\right) \\
= \; & (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2
\end{aligned}$$

   comme : $(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0$, *alors* $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \geq 0$. *Donc*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**