Correction du devoir

Exercice 1 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}^+$, *on pose :* $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1.$

1. *Montrons que l'équation* $P_n(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha_n \in]0, +\infty[$.

   ♣ *La fonction* P_n *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur* $\mathbb{R}^+$.

   ♣ *La fonction* P_n *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$. *On a*

   $$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), \quad P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

   puisque : $kx^{k-1} > 0$ *pour tout* $k \in \{1, ..., n\}$. *Donc*

   $$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), P_n'(x) > 0.$$

   D'où la fonction P_n *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$.

   Donc d'après le théorème de la bijection la fonction P_n *réalise une bijection de l'intervalle* $\mathbb{R}^+$ *sur* $P_n(\mathbb{R}^+) = \left[P_n(0), \lim_{x \longrightarrow +\infty} P_n(x)\right[= [-1, +\infty[$, *et comme* $0 \in [-1, +\infty[$ *alors il existe unique* α_n *dans* $]0, +\infty[$ *tel que* $P_n(\alpha_n) = 0$. *Autrement dit :*

   $$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[), \; P_n(\alpha_n) = 0.$$

2. .

   ♣ *Montrons que la suite* $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ *est décroissante.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *et* $x \in \mathbb{R}^+$,*on a*

   $$\begin{aligned} P_{n+1}(x) - P_n(x) &= x^{n+1} + x^n + ... + x^2 + x - 1 - \left(x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1\right) \\ &= x^{n+1} \end{aligned}$$

   comme $x^{n+1} \geq 0$ *alors* $P_{n+1}(x) - P_n(x) \geq 0$, *donc*

   $$(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), \; P_{n+1}(x) \geq P_n(x).$$

   En évaluans cette inégalité en $x = \alpha_n$ *on obtient* $P_{n+1}(\alpha_n) \geq P_n(\alpha_n)$, *et comme* $P_n(\alpha_n) = 0$ *alors* $P_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$, *puisque* $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, *alors* $P_{n+1}(\alpha_n) \geq P_{n+1}(\alpha_{n+1})$. *Comme* P_{n+1} *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$. *On en déduit que :*

   $$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

   D'où la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ *est décroissante.*

♣ *La suite* $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ *est minorée par* 0 *et comme elle est décroissante alors* $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ *converge vers* ℓ. $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\alpha_n=\ell\right)$.

3. *Montrons que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\alpha_n=\dfrac{1}{2}$.

   Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ *,on a*

$$\begin{aligned} P_n(\alpha_n) &= 0 \Longleftrightarrow \alpha_n^n+\alpha_n^{n-1}+...+\alpha_n^2+\alpha_n-1=0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha_n^n+\alpha_n^{n-1}+...+\alpha_n^2+\alpha_n+1=2 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\alpha_n^k=2 \qquad (\clubsuit) \end{aligned}$$

   puisque la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ *est décroissante alors* $\alpha_n\leq\alpha_2$ *et comme* α_2 *est solution de l'équation* $P_2(x)=0$, *alors*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0 \Longleftrightarrow x^2+x-1=0 \\ &\Longleftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad ou \quad x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ &\Longleftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

   ceci signifie que $\alpha_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Donc*

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}),\ 0<\alpha_n\leq\alpha_2$$

   Par suite comme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_n^k=\frac{1-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n}$ *, alors d'après* $(\clubsuit)$ *on a*

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n} &= 2 \\ &\Longleftrightarrow 1-\alpha_n^{n+1}=2(1-\alpha_n) \\ &\Longleftrightarrow 1-\alpha_n^{n+1}=2-2\alpha_n \\ &\Longleftrightarrow 2\alpha_n-\alpha_n^{n+1}-1=0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha_n=\frac{1+\alpha_n^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

   comme : $0<\alpha_n\leq\alpha_2$ *alors* $0<\alpha_n^{n+1}<\alpha_2^{n+1}$, *puisque* $|\alpha_2|=\left|\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right|<1$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\alpha_2^{n+1}=0$. *Ainsi d'après le théorème des gendarmes on en déduit que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\alpha_n^{n+1}=0$. *Donc*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\alpha_n=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1+\alpha_n^{n+1}}{2}=\frac{1}{2}$$

Exercice 2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on considère la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = x^3 + nx - 1$.

1. *Montrons que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* x_n *dans* $]0,1[$.

♣ *La fonction* f_n *est continue sur* $[0,1]$ *car c'est la restriction d'une fonction polynôme sur* $[0,1]$.

♣ *La fonction* f_n *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a* $f'_n(x) = 3x^2 + n$, *donc*

$$(\forall x \in [0,1]),\ f'_n(x) > 0.$$

D'où la fonction f_n *est strictement croissante sur* $[0,1]$.

♣ *On a :* $f_n(0) = -1$ *et* $f_n(1) = n$ *alors* $f_n(0) \times f(1) = -n < 0$.

Donc d'après le T.V.I l'équation $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* x_n *dans* $]0,1[$ *.Autrement dit*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad (\exists! x_n \in]0,1[),\quad f_n(x_n) = 0.$$

2. .

a) *Montrons que la suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^3 + (n+1)x - 1 - \left(x^3 + nx - 1\right) \\ &= nx + x - nx \\ &= x \end{aligned}$$

comme $x \geq 0$ *alors* $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$, *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in [0,1]),\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

En évaluans cette inégalité en $x = x_n$ *on obtient* $f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n)$ *et comme* $f_n(x_n) = 0$ *alors* $f_{n+1}(x_n) \geq 0$, *puisque* $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, *alors* $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$. *Comme* f_{n+1} *est strictement croissante sur* $[0,1]$. *On en déduit que :*

$$x_n \geq x_{n+1}$$

D'où la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

b) *La suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *est minorée par* 0 *et comme elle est décroissante alors* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* ℓ. $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \ell\right)$.

3. .

♣ *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ x_n < \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a* $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3} + n \times \dfrac{1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n^3} > 0$, *et comme* $f(x_n) = 0$ *alors*

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) > f_n(x_n)$$

puisque f_n *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,, x_n < \frac{1}{n}.$$

♣ *On cherche* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n$.

On a $0 < x_n < \dfrac{1}{n}$ *et comme* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *alors d'après le théorème des gendarmes on en déduit que :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Exercice 3 .

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ *et* $(w_n)_{n\geq 1}$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\ ,\ v_n = u_n - 2\sqrt{n+1}\ \text{et}\qquad w_n = u_n - 2\sqrt{n}$$

1. *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *est croissante et* $(w_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   ♣

   On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - 2\sqrt{n+2} - u_n + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}
\end{aligned}$$

comme $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$ *alors* $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)} \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ *est croissante.*

♣

On a

$$\begin{aligned}
w_{n+1}-w_n &= u_{n+1}-2\sqrt{n+1}-u_n+2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}
\end{aligned}$$

comme $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ *alors* $\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)} \leq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

2. *Montrons que les suites* $(v_n)_{n\geq 1}$ *et* $(w_n)_{n\geq 1}$ *sont adjacentes.*

   On a $(v_n)_{n\geq 1}$ *est croissante et* $(w_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante donc pour montrer que les suites* $(v_n)_{n\geq 1}$ *et* $(w_n)_{n\geq 1}$ *sont adjacentes il suffit de montrer que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n-w_n)=0$.

   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}(v_n-w_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n-2\sqrt{n+1}\ -u_n+2\sqrt{n} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0
\end{aligned}$$

   ce qui est signifie que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n-w_n)=0$. *On conclut que les suites* $(v_n)_{n\geq 1}$ *et* $(w_n)_{n\geq 1}$ *sont adjacentes par conséquent elles sont convergentes et ont la même limite c'est-à-dire* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell$.

3. *On déduit la limite de la suite u_n.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $v_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$ alors $u_n = v_n + 2\sqrt{n+1}$. $(\clubsuit)$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2\sqrt{n+1} = +\infty$ alors par passage à la limite dans $(\clubsuit)$ *on obtient*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com