Correction du devoir Maison

Exercice 1 .

1. *On considère les deux assertions :*

$$P : \left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right), x \geq 2\sqrt{x} - 1 \quad et \quad Q : (\forall y \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R}), xy \neq x.$$

a) *La négation de P et Q.*

♣ *La négation de P est :* $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}^{+}), x < 2\sqrt{x} - 1$.

♣ *La négation de Q est :* $\overline{Q} : (\exists y \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \mathbb{R}), xy = x$.

b) *Montrons que P est vraie et Q est fausse.*

♣ *Soit $x \in \mathbb{R}^{+}$.*
On a

$$x \geq 2\sqrt{x} - 1 \iff \sqrt{x^2} - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \iff \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \geq 0$$

comme l'assertion $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+}$, ce qui signifie que l'assertion P est vraie.

♣ *Si $y = 1$, on obtient l'égalité : $x = x$ qui est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'assertion $\overline{Q}$ est vraie, par suite l'assertion Q est fausse.*

2. *La négation des assertions R et F.*

♣ *La négation de l'assertion R est :* $\overline{R} : (\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall k \in \mathbb{Z}),\ k > x$ *ou* $x \geq x + 1$.

♣ *La négation de l'assertion F est :* $\overline{F} : \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha - \beta > 1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{Z}, \alpha \geq n$ *ou* $n \geq \beta)$.

Exercice 2 .

1. *Montrons que :* $\forall\,(a, b) \in (]0, +\infty[)^2,\ \ a^2 = b + 1 \implies \dfrac{\sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{b}}}{\sqrt{2\,(a + 1)}} = 1.$

Soit $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2$ *, on a*

$$\begin{array}{lll}
a^2 & = & b+1 \\
& \Longrightarrow & a^2 - b = 1 \\
& \Longrightarrow & \left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right) = 1 \\
& \Longrightarrow & \sqrt{a-\sqrt{b}} \times \sqrt{a+\sqrt{b}} = 1 \\
& \Longrightarrow & 2\sqrt{a-\sqrt{b}} \times \sqrt{a+\sqrt{b}} = 2 \\
& \Longrightarrow & 2a + 2\sqrt{a-\sqrt{b}} \times \sqrt{a+\sqrt{b}} - 2a = 2 \\
& \Longrightarrow & a+\sqrt{b} + 2\sqrt{a-\sqrt{b}} \times \sqrt{a+\sqrt{b}} + a - \sqrt{b} = 2\left(a+1\right) \\
& \Longrightarrow & \left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2 + 2\sqrt{a+\sqrt{b}} \times \sqrt{a-\sqrt{b}} + \left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{2\left(a+1\right)}\right)^2 \\
& \Longrightarrow & \left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{2\left(a+1\right)}\right)^2 \\
& \Longrightarrow & \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a+1\right)} \\
& \Longrightarrow & \dfrac{\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{2\left(a+1\right)}} = 1.
\end{array}$$

Donc

$$\forall\left(a,b\right) \in (]0,+\infty[)^2, \ a^2 = b+1 \implies \frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2\left(a+1\right)}} = 1.$$

2. *Montrons par la contraposée que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), \ \dfrac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \implies \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'assertion : $\dfrac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \implies \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$ *est équivalente :* $\dfrac{n}{3} \notin \mathbb{N} \implies \dfrac{n^2}{3} \notin \mathbb{N}$.

On suppose que $\dfrac{n}{3} \notin \mathbb{N}$. *On va distinguer deux cas lorsque* $n = 3k+1$ *ou* $n = 3k+2$ *tel que* $k \in \mathbb{N}$.

♣ Si $n = 3k+1$, *alors*

$$n^2 = \left(3k+1\right)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\left(3k^2+2k\right) + 1$$

On pose $p = 3k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. *On obtient :* $n^2 = 3p+1$. *Donc ceci signifie que* 3 *ne divise pas* n^2. $\left(c\text{'est-à-dire} \ : \ \dfrac{n^2}{3} \notin \mathbb{N}\right)$.

♣ Si $n = 3k+2$, *alors*

$$n^2 = \left(3k+2\right)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\left(3k^2+4k+1\right) + 1$$

On pose $p' = 3k^2 + 4k + 1 \in \mathbb{N}$. On obtient : $n^2 = 3p' + 1$. Donc ceci signifie que 3 ne divise pas n^2. $\left(\text{c'est-à-dire : } \dfrac{n^2}{3} \notin \mathbb{N}\right)$.

On conclut que dans tous les deux cas $\dfrac{n^2}{3} \notin \mathbb{N}$. Ceci signifie que : $\dfrac{n}{3} \notin \mathbb{N} \implies \dfrac{n^2}{3} \notin \mathbb{N}$. Donc par contraposition ceci est équivalente à :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ \frac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \implies \frac{n}{3} \in \mathbb{N}.$$

3. *Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que : $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{4}{3}\sqrt{x}$.*

   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   On a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} &\leq \frac{4}{3}\sqrt{x} \\
&\iff \sqrt{x}\left(\frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{4}{3}\right) \leq 0 \\
&\iff \sqrt{x}\left(\frac{3 - 4\left(x^2 - x + 1\right)}{3\left(x^2 - x + 1\right)}\right) \leq 0 \\
&\iff \sqrt{x}\left(\frac{3 - 4x^2 + 4x - 4}{3\left(x^2 - x + 1\right)}\right) \leq 0 \\
&\iff \sqrt{x}\left(\frac{-4x^2 + 4x - 1}{3\left(x^2 - x + 1\right)}\right) \leq 0 \\
&\iff -\sqrt{x}\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{3\left(x^2 - x + 1\right)}\right) \leq 0 \\
&\iff -\sqrt{x}\left(\frac{(2x - 1)^2}{3\left(x^2 - x + 1\right)}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

   comme la dernière inégalité est toujours vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Donc

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), \frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}\sqrt{x}$$

4. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que : $\sqrt{4n^2 + 5n + 3} \notin \mathbb{N}$.*

   On suppose par l'absurde que $\sqrt{4n^2 + 5n + 3} \in \mathbb{N}$. Alors

$$\exists m \in \mathbb{N}, \ \sqrt{4n^2 + 5n + 3} = m$$

   Donc

$$4n^2 + 5n + 3 = m^2$$

On a : $(2n+1)^2 < 4n^2+5n+3$ *et* $4n^2+5n+3 < (2n+2)^2$. *C'est-à-dire*

$$(2n+1)^2 < 4n^2+5n+3 < (2n+2)^2$$

donc

$$(2n+1) < \sqrt{4n^2+5n+3} < (2n+2)$$

d'où

$$(2n+1) < m < (2n+2) .$$

C'est une contradiction car on peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs $(2n+1)$ *et* $(2n+2)$.

Ceci signifie que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) , \ \sqrt{4n^2+5n+3} \notin \mathbb{N}$$

Exercice 3 .

1. *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* (I) : $\sqrt{x-1} \geq x-7$.

   On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I) .

$$\begin{aligned} D_{(I)} &= \{x \in \mathbb{R} / \ \ x-1 \geq 0\} \\ &= [1, +\infty[. \end{aligned}$$

Le tableau de signe de l'expression $x-7$:

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	0	$+$	

♣ Si $x \in [1, 7[$, *alors* $x-7 < 0$ *donc* $\sqrt{x-1} \geq x-7$ *est vraie pour tout* $x \in [1, 7[$.
D'où

$$S_1 = [1, 7[$$

♣ Si $x \in [7, +\infty[$, *alors* $x-7 \geq 0$.
Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \quad &\geq \quad x-7 \iff (x-1) \geq (x-7)^2 \\ &\iff \quad (x-1) - \left(x^2 - 14x + 49\right) \geq 0 \\ &\iff \quad -x^2 + 15x - 50 \geq 0 \\ &\iff \quad x \in [5, 10] . \end{aligned}$$

D'où

$$S_2 = [5, 10] \cap [7, +\infty[= [7, 10] .$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S = S_1 \cup S_2 = [1, 10]$$

2. *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{4} > 0.$

♣ Si $x \leq 0$, *on a*

$$\begin{aligned} x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= x^2\left(x^4 - x^3 + x^2 - x\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= x^2\left[x^3(x-1) + x(x-1)\right] + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= x^2(x-1)\left(x^3 + x\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

comme $x^2(x-1)(x^3+x) \geq 0$ *et* $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$, *alors*: $x^2(x-1)(x^3+x) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$

donc

$$(\forall x \in\,]-\infty, 0]),\quad x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0.$$

♣ Si $x \geq 1$, *on a*

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} = x^2(x-1)\left(x^3 + x\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

comme $x^2(x-1)(x^3+x) \geq 0$ *et* $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$, *alors*: $x^2(x-1)(x^3+x) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$

donc

$$(\forall x \in [1, +\infty[),\quad x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0.$$

♣ Si $0 < x < 1$, *on a*

$$\begin{aligned} x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - x^5 + x^4 + \frac{1}{4} \\ &= \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^4(x-1) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

comme : $\left(x^3-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ *et* $-x^4(x-1)+\dfrac{1}{4}>0$, *alors*: $\left(x^3-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-x^4(x-1)+\dfrac{1}{4}>0$

donc

$$(\forall x \in \left]0,1\right[), \quad x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0.$$

On en déduit dans tous les cas que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0.$$

3. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \ 1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$

♣ *Pour* $n=1$, *on a* $4=(1+1)^2$. *L'assertion est vraie.*

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que* $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$ *et on montre que* $1+3+5+...+(2n+3)=(n+2)^2$.

On a

$$\begin{aligned} 1+3+5+...+(2n+3) &= 1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) \\ &= (n+1)^2+(2n+3) \\ &= \left(n^2+2n+1\right)+2n+3 \\ &= n^2+4n+4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

♣ *D'après le principe de récurrence on en déduit que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \ 1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Exercice 4 .

On cherche l'ensemble de définition de chaque fonction :

♣ $f(x)=\sqrt{(|x|-2)|x|}$

$$D_f=\{x \in \mathbb{R} \ / \ (|x|-2)|x| \geq 0\}$$

♣ Si $x<0$, *alors* $|x|(|x|-2)=x(x+2)$.

Le tableau de signe de l'expression $x(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		0
x		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	

Donc

$$|x|(|x|-2) \geq 0 \iff x \in \left]-\infty,-2\right]$$

♣ Si $x \geq 0,$ *alors* $|x|(|x|-2) = x(x-2)$.

Le tableau de signe de l'expression $x(x-2)$.

x	0		2		$+\infty$
x	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$	0	$-$	0	$+$	

Donc

$$|x|(|x|-2) \geq 0 \iff x \in \{0\} \cup [2, +\infty[$$

D'où

$$D_f =]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$$

♣ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x+2}} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$

Rappel

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & si\ x \in I \\ f(x) = f_2(x) & si\ x \in J \end{cases}$$

$$alors \quad : \quad D_f = (D_{f_1} \cap I) \cup (D_{f_2} \cap J)$$

On pose : $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x+2}}$ *et* $I =]-\infty, 1]$ *et* $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ *et* $J =]1, +\infty[$.

On a : $D_{f_1} =]-2, +\infty[$ *et* $D_{f_2} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ *alors*

$$D_{f_1} \cap I =]-2, +\infty[\cap]-\infty, 1] =]-2, 1]$$

$$et \quad : \quad D_{f_2} \cap J = \left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \cap]1, +\infty[=]1, +\infty[$$

donc

$$D_f =]-2, 1] \cup]1, +\infty[=]-2, +\infty[$$

♣ $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ (m *est un paramètre*).

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 + x + m \neq 0\right\}$$

Calculons le discriminant Δ *de l'équation* : $x^2 + x + m = 0$.

$$\Delta = 1 - 4m$$

♣ Si $m = \frac{1}{4}$, *alors* $\Delta = 0$ *c'est-à-dire l'équation admet unique solution :* $x = \frac{-1}{2}$.
Donc

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

♣ Si $m > \frac{1}{4}$, *alors* $\Delta < 0$ *c'est-à-dire l'équation n'admet aucune solution dans* $\mathbb{R}$. *Donc*

$$D_f = \mathbb{R}$$

♣ Si $m < \frac{1}{4}$, *alors* $\Delta > 0$ *c'est-à-dire l'équation admet deux solutions réelles distinctes dans* $\mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4m}}{2} \quad et \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4m}}{2}.$$

Donc

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{-1 + \sqrt{1-4m}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{1-4m}}{2} \right\}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com