La Fonction Arctan

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1 *La fonction arctangente, notée* arctan*, est la réciproque de la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$

telle que :

$$\begin{array}{lrcl} \arctan & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$

Théorème 2 *.*

1. $\forall (x, y) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}, \tan x = y \iff x = \arctan y$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$ *et* $\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan x) = x.$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), \arctan x = \arctan y \iff x = y$
4. *La fonction* arctan *est impaire.*
5. *La fonction* arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$.
6. *La fonction* arctan *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 3 *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration 4 *Pour tout* $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*, on pose* $f(x) = \tan x$*,* f *est dérivable sur* $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et pour tout* $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*, on a :*

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

comme f' *ne s'annule pas sur* $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *, donc* $f^{-1} = \arctan$ *est dérivale sur* $f\left(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$*, et pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Dérivée d'une fonction de la forme arctan u .

La fonction $\arctan u$ est dérivable sur tout intervalle ou la fonction u est dérivable et on a :

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Exemple 5 *On considère la fonction f définie par :* $f(x) = \arctan(x^2+1)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$

Limites

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Théorème 6 .

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ \ x \succ 0 \\ \frac{-\pi}{2} & si\ x \prec 0 \end{cases}$$

Démonstration 7 *On propose deux démonstrations.*

- *Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$, il existe un unique α de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :* $\tan\alpha = x$. *C'est-à-dire :* $\alpha = \arctan x$.

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$$

et comme $\frac{\pi}{2}-\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, alors on en déduit que : $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. *Ceci signfie que pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, on a :*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

- *Si $x \in \left]-\infty,0\right[$.*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\left(\arctan(-x) + \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

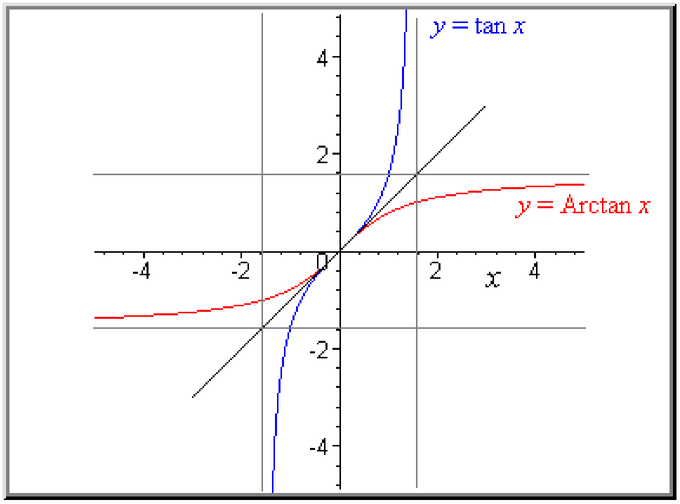
Autre démonstration.

Pout tout x de $\mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

f est donc constante sur $\left]0,+\infty\right[$ et pour $x \succ 0$, $f(x) = f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ puis, f étant impaire, pour $x \prec 0$, $f(x) = -f(-x) = \frac{-\pi}{2}$. □

Graphe de la fonction $\arctan$



Exercices

Exercice 8 *Soient a et b deux réels positifs, montrer que :*

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

a et b deux réels positifs. Alors, $\arctan a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $\arctan b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et donc,* $\arctan a - \arctan b \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus :

$$\tan\left(\arctan a - \arctan b\right) = \frac{\tan\left(\arctan a\right) - \tan\left(\arctan b\right)}{1 + \tan\left(\arctan a\right)\tan\left(\arctan b\right)} = \frac{a-b}{1+ab}$$

et puisque : $\arctan a - \arctan b \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *alors :*

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

Exercice 9 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f(x) = x.\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue en* 0.
2. *Montrer que :* $(\forall x \in \left]0, +\infty\right[)$, $f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan x$, *puis déduire une expression simplifiable à $f(x)$ pour tout $x \in \left]-\infty, 0\right[$.*

3. On considère l'équation :

$$(E): \ \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right)=\frac{5\pi}{12}, \qquad (x \succ 0)$$

a) *Démontrer que l'équation (E) équivaut à :* $f\left(\sqrt{x}\right)=\frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$, $(x \in \left]0,+\infty\right[)$.

b) *Déterminer l'ensemble des solutions de (E).*

Solution 10 .

1. *On a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=+\infty$, *par suite :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$. *Donc :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=0=f(0)$. *D'où f est continue à droite de* 0.

   D'autre part, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=-\infty$, *par suite :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$. *Donc :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0-} f(x)=0=f(0)$. *D'où f est continue à gauche de* 0.

   Comme f est continue à droite et à gauche en 0, *alors f est continue en* 0.

2. *Soit* $x\in\left]0,+\infty\right[$, *il existe un unique* α *de* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *tel que :* $\tan\alpha=x$. *C'est-à-dire :* $\alpha=\arctan x$.

   On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{1+\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\\
&= \frac{1+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}{\tan\alpha}\\
&= \frac{1+\frac{1}{\cos\alpha}}{\tan\alpha}\\
&= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\\
&= \frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

   on a : $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, *par suite :* $\arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x.\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}x-\frac{x\arctan x}{2}
\end{aligned}$$

   Donc :

$$(\forall x\in\left]0,+\infty\right[), \quad f(x)=\frac{\pi}{2}x-\frac{x}{2}\arctan x$$

Expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

On a : $x \in]-\infty, 0[$, alors : $-x \in]0, +\infty[$ et par suite :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-\pi}{2}x - \frac{(-x)}{2}\arctan(-x) \\ &= \frac{-\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan(x) \end{aligned}$$

et comme f est une fonction paire alors : $f(-x) = f(x)$. Donc :

$$(\forall x \in]-\infty, 0[) \,, \quad f(x) = \frac{-\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan x$$

a) *Soit $x \in]0, +\infty[$.*

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) &= \frac{5\pi}{12} \iff \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12} \\ &\iff \arctan\left(\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\left(\sqrt{x}^2\right)}\right) = \frac{5\pi}{12} \\ &\iff \sqrt{x}\arctan\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\frac{5\pi}{12} \\ &\iff f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) *Soit $x \in]0, +\infty[$.*

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{x}\right) &= \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \iff \frac{\pi}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}\arctan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ &\iff \pi - \arctan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{5\pi}{6} \\ &\iff \arctan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{6} \\ &\iff \sqrt{x} = \tan\frac{\pi}{6} \\ &\iff \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

Exercice 11 *Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \arctan(x)$$

1. *Calculer* $f(0)$.

2. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Solution 12 .

1. *On a :* $f(0) = 2\arctan 1 + \arctan 0 = 2 \times \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{2}$.

2. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et pour tout* x *de* $\mathbb{R}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan(x)\right)' \\
&= 2 \times \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= 2 \times \frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2\right)} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= 2 \times \frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{(1+x^2)^2}-x\sqrt{1+x^2}\right)} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\times\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0.
\end{aligned}$$

La fonction f *est constante sur* $\mathbb{R}$.

Comme : $f(0) = \frac{\pi}{2}$, *alors :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 13 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

$$\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

Solution 14 *Remarque que* $x \succ 0$, *sinon* $\arctan 2x + \arctan x \leq 0$. *En particulier* $\arctan 2x + \arctan x \neq \frac{\pi}{4}$. *Une solution est donc nécessairement* ***strictement positive.***

Soit x *un réel strictement positif.*

$$\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4} \iff \arctan 2x = \frac{\pi}{4} - \arctan x$$

Comme : $\arctan 2x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $\frac{\pi}{4} - \arctan x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Alors* :

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan 2x) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan x\right) \\
&\iff 2x = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(\arctan x)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(\arctan x)} \\
&\iff 2x = \frac{1-x}{1+x} \\
&\iff 2x(1+x) = 1 - x \quad et \quad x + 1 \neq 0 \\
&\iff 2x^2 + 3x - 1 = 0
\end{aligned}$$

On obtient comme solutions : $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ *et* $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$. *On ne garde que la solution positive. On a donc* :

$$S = \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$$

FIN

www.etude – generale.com

Pr : **Yahya MATIOUI**