

Devoir Surveillé

Durée 2H

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{\arctan(x-1)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt[3]{x - 8x^3}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 2 .

1. Montrer que : $2 \arctan(2) + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi$.

2. Montrer que : $(\forall x \in]1, +\infty[), \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2 \arctan(x) - \pi$.

3. Résoudre dans \mathbb{R} ce qui suit : $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan(x) + \arctan(2x) > \frac{\pi}{3}$.

Exercice 3 .

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que : $(\forall x \in [0, 1], f(x) \leq 0)$ et $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c \in [0, 1]), f(c) = f\left(c + \frac{1}{c}\right)$.

Exercice 4 On considère la fonction g définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par : $g(x) = \frac{-1}{1 - \tan^3(x)}$.

1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2. Dresser le tableau de variations de g^{-1} .

3. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

FIN

La correction du devoir sur le site : www.etude-generale.com