Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction du devoir Surveillé

Exercice 1 *Calculons les limites suivantes :*

1. ♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{\arctan(x-1)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{\arctan(x-1)} &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\arctan(x-1)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x^2-1)}{\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)\arctan(x-1)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)\arctan(x-1)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}\times\frac{1}{\frac{\arctan(x-1)}{x-1}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}x-1=0$ *et* $\lim\limits_{X\longrightarrow 0}\dfrac{\arctan X}{X}=1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}=\dfrac{2}{3}$.

■ *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}x\arctan\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{2}x$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}x\arctan\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\longrightarrow +\infty}x\left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

Soit $x\in\left]0,+\infty\right[$, *on a*

$$\arctan\left(\sqrt{x}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire : $\arctan\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{2}=-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. *Donc*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow +\infty}-x\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}-x\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(-\sqrt{x}\right)\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0,$ *et* $\lim\limits_{X\longrightarrow 0}\frac{\arctan X}{X}=1.$ *Donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(-\sqrt{x}\right)\times\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=-\infty$$

1. ♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x}{x}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{-x^3}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1+\sqrt[3]{-\frac{x^2}{x^3}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1+\sqrt[3]{-\frac{x^2}{x^3}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1+\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}=1\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{-\dfrac{1}{x}}=0.$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\left(2x+1-\sqrt[3]{x-8x^3}\right).$

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(2x+1-\sqrt[3]{x-8x^3}\right) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}2x+1-\sqrt[3]{(-8x^3)\left(-\frac{x}{8x^3}+1\right)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}2x+1+2x\sqrt[3]{-\frac{1}{8x^2}+1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}2x\left(1+\frac{1}{2x}+\sqrt[3]{-\frac{1}{8x^2}+1}\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}-\dfrac{1}{8x^2}+1=1$ *et la fonction* $x\longmapsto\sqrt[3]{x}$ *est continue en* $1,$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8x^2}+1}=1.$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{x}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{x}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^3}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^5}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\left(2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x\,(x-1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\left(2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x\,(x-1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}-\sqrt[3]{x}\left(2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x\,(x-1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x\,(x-1)}+\sqrt[3]{x^2}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)=1.$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2-x}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^4}+x+\sqrt[3]{x^2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}+1+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}+1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}=0
\end{aligned}$$

Exercice 2 .

1. *Montrons que :* $2\arctan(2) + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi$.

   Calculons d'abord : $2\arctan 2$.
   On a $2 > 0$ *alors* $\arctan(2) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *d'où* $2\arctan(2) \in]0, \pi[$. *Donc*

$$\tan(2.\arctan 2) = \frac{2\tan(\arctan(2))}{1 - \tan^2(\arctan 2)} = \frac{2\times 2}{1-4} = -\frac{4}{3}$$

   puisque : $\tan(2.\arctan(2)) < 0$, *alors*

$$\begin{aligned} 2.\arctan(2) \ \epsilon \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[&\iff \frac{\pi}{2} < 2.\arctan 2 < \pi \\ &\iff -\frac{\pi}{2} < (2.\arctan(2)) - \pi < 0 \\ &\iff (2.\arctan(2) - \pi) \in \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[\end{aligned}$$

   Or : $\tan(2.\arctan 2) = \tan((2.\arctan(2)) - \pi)$, *et comme* $\tan(2.\arctan 2) = \frac{-4}{3}$ *alors*

   $\tan((2.\arctan(2)) - \pi) = \frac{-4}{3} \iff \arctan(\tan((2.\arctan(2)) - \pi)) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right)$

   Donc

$$2.\arctan(2) - \pi = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)$$

   Ceci signifie que

$$2\arctan(2) = \pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

   D'où

$$2\arctan(2) + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi$$

   On obtient

$$2\arctan(2) + \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \pi.$$

2. *Montrons que pour tout* $x \in]1, +\infty[$, *on a* $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan(x) - \pi$.

   Soit $x \in]1, +\infty[$, *alors il existe un unique* $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* : $\tan\alpha = x$. (*C'est-à-dire* : $\alpha = \arctan x$
   Donc

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan(2\alpha) \quad (\clubsuit)$$

On a

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \iff \frac{-\pi}{2} < 2\alpha - \pi < 0 \iff (2\alpha - \pi) \in \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$$

et comme : $\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha - \pi)$ *. Donc d'après* ($\clubsuit$) *on obtient*

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) &= \arctan(\tan(2\alpha - \pi)) \\ &= 2\alpha - \pi \\ &= 2\arctan x - \pi \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in]1, +\infty[), \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan x - \pi$$

3. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

■ $(E) : \arctan(x) + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{3}.$

Soit S *l'ensemble des solution de l'équation* (E) *.*

On sait que le signe de $\arctan(x)$ *est celui de* x*, et puisque* $\dfrac{\pi}{3} > 0$ *alors nécessairement* $x > 0$ *.*

Donc $S \subset]0, +\infty[$*. C'est-à-dire que l'équation n'admet pas des solutions dans* $\mathbb{R}^-$.

Soit $x \in]0, +\infty[$*, alors* $\arctan x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et* $\left(\frac{\pi}{3} - \arctan(x)\right) \in \left]\dfrac{-\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right[$*. Donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff \arctan 2x = \frac{\pi}{3} - \arctan(x) \\ &\iff \tan(\arctan 2x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \arctan(x)\right) \\ &\iff 2x = \frac{\sqrt{3} - x}{1 + \sqrt{3}x} \\ &\iff 2x\left(1 + \sqrt{3}x\right) = \sqrt{3} - x \\ &\iff 2\sqrt{3}x^2 + 3x - \sqrt{3} = 0 \\ &\iff x = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4} \quad \text{ou } x = \underbrace{\frac{-\sqrt{99} - 3\sqrt{3}}{12}}_{<0} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}\right\}$$

■ $(I) : \arctan(x) + \arctan(2x) > \dfrac{\pi}{3}$.

Soit S l'ensemble des solution de l'inéquation (I) .

On sait que le signe de $\arctan(x)$ *est celui de* x*, et puisque* $\dfrac{\pi}{3} > 0$ *alors nécessairement* $x > 0$ *.*

Donc $S \subset]0, +\infty[$*. C'est-à-dire que l'inéquation n'admet pas des solutions dans* $\mathbb{R}^-$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, *alors* $\arctan x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et* $\left(\frac{\pi}{3} - \arctan(x)\right) \in \left]\dfrac{-\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right[$. *Donc*

$$
\begin{aligned}
(I) &\iff \arctan 2x > \frac{\pi}{3} - \arctan(x) \\
&\iff \tan(\arctan 2x) > \tan\left(\frac{\pi}{3} - \arctan(x)\right) \\
&\iff 2x > \frac{\sqrt{3} - x}{1 + \sqrt{3}x} \\
&\iff 2x\left(1 + \sqrt{3}x\right) > \sqrt{3} - x \\
&\iff 2\sqrt{3}x^2 + 3x - \sqrt{3} > 0 \\
&\iff x \in \left]-\infty, \frac{-\sqrt{99} - 3\sqrt{3}}{12}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}, +\infty\right[
\end{aligned}
$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (I) est :

$$
\begin{aligned}
S &= \left(\left]-\infty, \frac{-\sqrt{99} - 3\sqrt{3}}{12}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{4}, +\infty\right[\right) \cap \mathbb{R}^+ \\
&= \left]\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4}, +\infty\right[
\end{aligned}
$$

Exercice 3 .

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists c \in [0,1])\,,\ \ f(c) = f\left(c + \dfrac{1}{n}\right)$.

On considère la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$.

$$
\begin{aligned}
g(x)\ \textit{existe} &\iff 0 \leq x \leq 1 \quad \textit{et}\ 0 \leq x + \frac{1}{n} \leq 1 \\
&\iff 0 \leq x \leq 1 \quad \textit{et}\ -\frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\
&\iff 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\
&\iff x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]
\end{aligned}
$$

Donc la fonction g est définie sur $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$.

♣ *La fonction g est continue sur $\left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ comme composée et somme de fonctions continues.*

♣ *On a :* $g(0) = f(0) - f\left(\dfrac{1}{n}\right) = -f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *et comme la fonction f est négative sur $[0,1]$, alors $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq 0$, ce qui est signifie que : $g(0) \geq 0$. Par suite : $g\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leq 0$. Donc :*

$$g(0) \times g\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

D'où d'après le T.V.I il existe au moins $c \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que : $g(c) = 0$.

Or $g(c) = 0$ c'est équivaut à : $f(c) - f\left(c+\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Par suite

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists c \in [0,1])\,,\ f(c) = f\left(c+\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 4 .

On considère la fonction g définie sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ par : $g(x) = \dfrac{-1}{1-\tan^3 x}$.

1. *Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J.*

   Les fonctions $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \tan^3 x$ sont continues I alors la fonction $u : x \longmapsto 1-\tan^3 x$ est continue sur I, et comme elle ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est continue sur I. Il en résulte que la fonction $g = \dfrac{-1}{u}$ est continue sur I.

   Soient x et y deux éléments de I tels que : $x < y$.

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow \tan x < \tan y \\ &\Longrightarrow \tan^3 x < \tan^3 y \\ &\Longrightarrow 1-\tan^3 x > 1-\tan^3 y \\ &\Longrightarrow \frac{1}{1-\tan^3 x} < \frac{1}{1-\tan^3 y} \\ &\Longrightarrow \frac{-1}{1-\tan^3 x} > \frac{-1}{1-\tan^3 y} \\ &\Longrightarrow g(x) > g(y) \end{aligned}$$

   Donc la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Donc d'après le théorème de la fonction réciproque, la fonction g réalise une bijection de I sur $g(I) = g\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\right) = \left]\lim\limits_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}^-} g(x), g(0)\right] =]-\infty, -1]$. Car

$$\left(\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}^-} g(x) = \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{-1}{1-\tan^3 x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\right)$$

.

2. *Le tableau de variations de la fonction g^{-1}.*

   La fonction g^{-1} est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$. Donc

x	$-\infty$		-1
g^{-1}	$\frac{pi}{4}$	$\searrow$	0

3. *Soit $y \in \left]-\infty,-1\right]$ et $x \in I$*

   Résolvons l'équation $g(x) = y$ dans I.

$$\begin{aligned}
g(x) &= y \iff \frac{-1}{1-\tan^3 x} = y \\
&\iff -1 = y\left(1-\tan^3 x\right) \\
&\iff 1+y = y\tan^3 x \\
&\iff \tan^3 x = \frac{1+y}{y} \\
&\iff \tan x = \sqrt[3]{\frac{1+y}{y}} \\
&\iff x = \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1+y}{y}}\right)
\end{aligned}$$

comme : $\arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1+y}{y}}\right) \in I$. *Donc*

$$\left(\forall x \in \left]-\infty,-1\right]\right),\ g^{-1}(x) = \arctan\left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}\right)$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com