Correction du devoir

Exercice 1 .

On pose : $\mathbf{a} = \mathbf{7}^{n+2} - \mathbf{7}^{n}$ *et* $\mathbf{b} = \mathbf{3} \times \mathbf{7}^{n+1} + \mathbf{5} \times \mathbf{7}^{n}$. *Où* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrons que* a *est divisible par* 3 *et* b *divisible par* 13.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   ♣ *On a*

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{7}^{n+2} - \mathbf{7}^{n} \\ &= 7^{n} \times 7^{2} - 7^{n} \\ &= 7^{n}\left(7^{2} - 1\right) \\ &= 7^{n}(49 - 1) \\ &= 7^{n} \times 48 \\ &= 7^{n} \times 16 \times 3 \end{aligned}$$

   Donc 3 *divise* a.

   ♣ *On a*

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= 3 \times 7^{n+1} + 5 \times 7^{n} \\ &= 3 \times 7^{n} \times 7 + 5 \times 7^{n} \\ &= 7^{n}(3 \times 7 + 5) \\ &= 7^{n} \times 26 \\ &= 7^{n} \times 13 \times 2 \end{aligned}$$

   Donc 13 *divise* b.

2. *La décomposition en facteurs premiers de* a *et* b.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a

$$\begin{aligned} a &= 7^{n} \times 16 \times 3 \\ &= 7^{n} \times 2^{4} \times 3 \end{aligned}$$

   et

$$b = 7^{n} \times 13 \times 2$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a = 7^{n} \times 2^{4} \times 3$ *et* $b = 7^{n} \times 13 \times 2$.

3. *On cherche* $PGCD(a,b)$ *et* $PPCM(a,b)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a : $a = 7^n \times 2^4 \times 3$ *et* $b = 7^n \times 13 \times 2$. *Donc*

$$PGCD(a,b) = 7^n \times 2 \quad \text{et} \quad PPCM(a,b) = 7^n \times 2^4 \times 3 \times 13.$$

Exercice 2 .

On cherche tous les couples (x,y) *d'entiers naturels non nuls vérifiant :* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Soit x *et* y *deux entiers naturels non nuls.*

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \\
\text{Éq} \quad &: \quad \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{2} \\
\text{Éq} \quad &: \quad 2(y+x) = xy \\
\text{Éq} \quad &: \quad 2x + 2y - xy = 0 \\
\text{Éq} \quad &: \quad 2x - xy + 2y = 0 \\
\text{Éq} \quad &: \quad x(2-y) + 2y - 4 + 4 = 0 \\
\text{Éq} \quad &: \quad x(2-y) - 2(2-y) + 4 = 0 \\
\text{Éq} \quad &: \quad (2-y)(x-2) = -4 \\
\text{Éq} \quad &: \quad (y-2)(x-2) = 4 \\
\text{Éq} \quad &: \quad \begin{cases} y-2=2 \\ x-2=2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y-2=1 \\ x-2=4 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y-2=4 \\ x-2=1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y-2=-2 \\ x-2=-2 \end{cases} \\
\text{Éq} \quad &: \quad \begin{cases} y=4 \\ x=4 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y=3 \\ x=6 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y=6 \\ x=3 \end{cases} \text{ou} \underbrace{\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}}_{impossible} \\
\text{Éq} \quad &: \quad (x,y) \in \{(4,4),(6,3),(3,6)\}
\end{aligned}$$

Exercice 3 .

1. *Vérifions que :* $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

   Soit $p \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned}
p &= \frac{4p}{4} \\
&= \frac{2p+2p+p^2-p^2+1-1}{4} \\
&= \frac{p^2+2p+1-p^2+2p-1}{4} \\
&= \frac{(p^2+2p+1)-(p^2-2p+1)}{4} \\
&= \frac{(p+1)^2-(p-1)^2}{4} \\
&= \frac{(p+1)^2}{4}-\frac{(p-1)^2}{4} \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

2. *On a* 2019 *est un nombre impair alors on applique le résultat de la question précédente*

$$\begin{aligned}
2019 &= \left(\frac{2019+1}{2}\right)^2-\left(\frac{2019-1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2020}{2}\right)^2-\left(\frac{2018}{2}\right)^2 \\
&= 1010^2-1009^2
\end{aligned}$$

Tout entier impair s'écrit sous la forme de différence de deux carrés consécutifs.

3. **a)** *Vérifions que le nombre n^2+n+7 est impair.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a

$$n^2+n+7=\underbrace{n\,(n+1)}_{pair}+\underbrace{7}_{impair}$$

   comme n^2+n+7 s'écrit sous la forme d'une somme d'un entier pair et impair donc n^2+n+7 est impair.

   b) *On écrit n^2+n+7 comme la différence de deux carrés consécutifs.*

On sait que n^2+n+7 *est un entier impair alors d'après la question* $1/$ *on a*

$$\begin{aligned} n^2+n+7 &= \left(\frac{n^2+n+7+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2+n+7-1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n^2+n+8}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2+n+6}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)+8}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)+6}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2k+8}{2}\right)^2-\left(\frac{2k+6}{2}\right)^2 \qquad / \quad n(n+1)=2k \quad \text{avec } k\in\mathbb{N} \\ &= (k+4)^2-(k+3)^2 \end{aligned}$$

Exercice 4 .

1. *Montrons que* $a-b$ *et* $a+b$ *ont la même parité.*

   Soient a *et* b *deux entiers naturels tels que :* $a>b$.

   On a

   $$(a+b)+(a-b)=2a$$

   alors la somme de $(a+b)$ *et* $(a-b)$ *est un entier pair, ceci signifie que* $(a+b)$ *et* $(a-b)$ *ont la même parité.*

2. *On cherche les couples* (a,b) *d'entiers naturels tels que :* $a^2-b^2=36$.

   Soit a *et* b *deux entiers naturels.*

   $$\begin{aligned} a^2-b^2 &= 36 \\ \acute{E}q &: \ (a-b)(a+b)=36 \end{aligned}$$

   alors $(a-b)$ *et* $(a+b)$ *sont deux diviseurs de* 36 *et comme* $(a+b)$ *et* $(a-b)$ *ont la même parité, et* $a+b\geq a-b$ *on obtient les cas suivants*

   $$\begin{aligned} & \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=18 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a-b=6 \\ a+b=6 \end{cases} \\ Eq \ : \ & \begin{cases} a=2+b \\ a+b=18 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a=6+b \\ a+b=6 \end{cases} \\ Eq \ : \ & \begin{cases} a=2+b \\ 2b=18-2 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a=6+b \\ 2b=6-6 \end{cases} \\ Eq \ : \ & \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a=6 \\ b=0 \end{cases} \\ Eq \ : \ & (x,y)\in\{(10,8),(6,0)\} \end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**