Correction du devoir

Exercice 1 .

1. *On pose :* $A = \sqrt{7-\sqrt{33}} - \sqrt{7+\sqrt{33}}$.

   Calculons A^2.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{7-\sqrt{33}} - \sqrt{7+\sqrt{33}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{7-\sqrt{33}}\right)^2 - 2\sqrt{7-\sqrt{33}} \times \sqrt{7+\sqrt{33}} + \left(\sqrt{7+\sqrt{33}}\right)^2 \\ &= 7-\sqrt{33} - 2\sqrt{\left(7-\sqrt{33}\right)\left(7+\sqrt{33}\right)} + 7 + \sqrt{33} \\ &= 14 - 2\sqrt{49-33} \\ &= 14 - 2\sqrt{16} \\ &= 14 - 2\times 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

   Écriture simplifiée pour A :

   On a

$$\begin{aligned} A^2 &= 6 \\ Eq &: A^2 - 6 = 0 \\ Eq &: \left(A-\sqrt{6}\right)\left(A+\sqrt{6}\right) = 0 \\ Eq &: A-\sqrt{6} = 0 \quad ou \quad A+\sqrt{6} = 0 \\ Eq &: \underbrace{A = \sqrt{6}}_{\textbf{impossible}} \quad ou \quad A = -\sqrt{6} \\ Eq &: A = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

2. *On considère le nombre* $A = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

   Montrons que A *est solution de l'équation :* $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
A^4-10A^2+1 &= \left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2\right]^2-10\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+1\\
&= \left[\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^2-10\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)+1\\
&= \left(2-2\sqrt{6}+3\right)^2-10\left(2-2\sqrt{6}+3\right)+1\\
&= \left(5-2\sqrt{6}\right)^2-10\left(5-2\sqrt{6}\right)+1\\
&= \left(25-20\sqrt{6}+24\right)-50+20\sqrt{6}+1\\
&= 25+24-50+1-20\sqrt{6}+20\sqrt{6}\\
&= 49-49\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc A est solution de l'équation $x^4-10x^2+1=0$.

Exercice 2 .

Soient a et b deux réels non nuls.
On a

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a^{-2}b\left(a^2b^{-1}\right)^4a^{-3}b^2}{ab^{-2}\left(a^{-1}b^2\right)^3\left(a^2b^3\right)}\\
&= \frac{a^{-2}a^8a^{-3}bb^{-4}b^2}{aa^{-3}a^2b^{-2}b^6b^3}\\
&= \frac{a^{-2+8-3}b^{1-4+2}}{a^{1-3+2}b^{-2+6+3}}\\
&= \frac{a^3b^{-1}}{a^0b^7}\\
&= a^3b^{-1-7}\\
&= a^3b^{-8}
\end{aligned}$$

Exercice 3 .

Montrons que : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.
Soient a, b et c des réels non nuls tels que : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= 0\\ Eq &: \frac{b+a}{ab}+\frac{1}{c}=0\\ Eq &: \frac{c\,(b+a)+ab}{abc}=0\\ Eq &: c\,(b+a)=-ab\\ Eq &: b+a=\frac{-ab}{c}\\ Eq &: a+b=\frac{-ab}{c}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b)^2+2c\,(a+b)+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2+2c\times\left(\frac{-ab}{c}\right)+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab-2ab\\ &= a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

Donc

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$$

Exercice 4 .

1. *On développe* : $(a-1)\,(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)$:
   Soit $a\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}(a-1)\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right) &= a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6-1-a-a^2-a^3-a^4-a^5\\ &= a^6-1\end{aligned}$$

2. *On déduit la valeur de la somme* $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$.
   On a pour tout $a\in\mathbb{R}^*$:

$$(a-1)\left(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5\right)=a^6-1$$

pour $a = \frac{1}{3}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\right) &= \frac{1}{729}-1 \\
Eq &: \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\right)\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}}_{=S}\right)=\frac{-728}{729} \\
Eq &: \frac{-2}{3}\times S=\frac{-728}{729} \\
Eq &: S=\frac{\frac{-728}{729}}{\frac{-2}{3}} \\
Eq &: S=\frac{-728}{729}\times\frac{3}{-2} \\
Eq &: S=\frac{364}{243}
\end{aligned}$$

Exercice 5 .

1. *Soit* $x, y \in [1, +\infty[$.

   On a

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2-\left(\sqrt{xy}\right)^2 &= \left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}\times\sqrt{y-1}+\left(\sqrt{y-1}\right)^2-xy \\
&= x-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}+y-1-xy \\
&= x-1+y-xy+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= x-1+y(1-x)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= (x-1)-y(x-1)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= (x-1)(1-y)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= -(x-1)(y-1)+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= -\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}\right)^2+2\sqrt{(x-1)(y-1)}-1 \\
&= -\left(\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}\right)^2-2\sqrt{(x-1)(y-1)}\times 1+1^2\right) \\
&= -\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}-1\right)^2
\end{aligned}$$

   comme : $-\left(\sqrt{(x-1)(y-1)}+1\right)^2 \leq 0$ *pour tous* x *et* y *de* $[1, +\infty[$ *alors* $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\right)^2 - \left(\sqrt{xy}\right)^2 \leq 0$ *et puisque* $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \geq 0$ *et* $\sqrt{xy} \geq 0$*. Donc*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy} \quad \textit{pour tous } x, y \in [1, +\infty[$$

2. *Soient a, b, c , x , y et z des nombres réels.*

On a

$$
\begin{aligned}
& \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(ax+by+cz)^2 \\
= \; & (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2 \\
& -\left((ax+by)^2+2(ax+by)cz+(cz)^2\right) \\
= \; & (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2 \\
& -(ax+by)^2-2(ax+by)cz-(cz)^2 \\
= \; & (ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2-(ax)^2-2axby- \\
& (by)^2-2axcz-2bycz-(cz)^2 \\
= \; & (ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2-2axby-2axcz-2bycz \\
= \; & \left((ay)^2-2axby+(bx)^2\right)+\left((az)^2-2axcz+(cx)^2\right)+\left((bz)^2-2bycz+(cy)^2\right) \\
= \; & \left((ay)^2-2aybx+(bx)^2\right)+\left((az)^2-2azcx+(cx)^2\right)+\left((bz)^2-2bzcy+(cy)^2\right) \\
= \; & (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2
\end{aligned}
$$

comme : $(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0$, *alors* $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \geq 0$. *Donc*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**