

Série d'exercices sur les fonctions numériques

Exercice 1 .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^4 - 4|x|$.

1. Montrer que f est paire.

2. a) Montrer que :

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = (a + b)(a^2 + b^2) - 4 \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ et } a \neq b.$$

b) Dédurre que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), 3 + x^4 \geq 4x$.

4. Soient a, b et c des nombres réels strictement positifs.

Montrer que :

$$abc = 4 \implies (3 + a^2)(3 + b^2)(3 + c^2) \geq 128$$

Exercice 2 .

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = -x + 2\sqrt{x+1}$$

1. a) Vérifier : $D_h = [-1, +\infty[$.

b) Résoudre dans $[-1, +\infty[$ l'équation (E) : $h(x) = 0$.

2. a) Vérifier que : $(\forall x \in [-1, +\infty[), h(x) = 2 - (\sqrt{x+1} - 1)^2$.

b) En déduire que h est majorée par 2 sur $[-1, +\infty[$.

3. On pose : $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a) Vérifier que : $(\forall x \in [-1, 0]), 0 \leq f(x) \leq 1$ et $(\forall x \in [0, +\infty[), f(x) \geq 1$.

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) Montrer que : $(\forall x \in [-1, +\infty[), (g \circ f)(x) = h(x)$, puis déduire la monotonie de h sur chacun des intervalles $[-1, 0]$ et $[0, +\infty[$.

4. Dresser le tableau de variations de h puis en déduire ses extremums.

Exercice 3 .

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$$

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f majorée par 1 et minorée par -1 .
3. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$g(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

- a) Donner le tableau de variations de g .
 - b) Déterminer : $g([0, 2[)$.
4. Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = x^4$.
 - a) Montrer que h est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .
 - b) Vérifier que : $f = g \circ h$ puis déduire la monotonie de f sur \mathbb{R}^+ .
 - c) Donner le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com