ETUDEGENERALE

Espaces vectoriels - exercices

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels :

- $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = x_3\}$
- $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$
- $G = \{f \in C([a, b]) : f(a) = 0\}$

Exercice 2

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les vecteurs :

- $v_1 = (1, 1, 0);\ v_2 = (-1, 2, -1)$
- $w_1 = (6, 0, 2);\ w_2 = (1, 4, -1);\ w_3 = (0, 3, -1)$

Que remarquez-vous ?

Exercice 3

Soient les deux-espaces vectoriels

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$$

1. Donner une famille génératrice de E et une famille génératrice de F.
2. Vérifier que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel et trouver une famille génératrice.

Exercice 4

Soit $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^3 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0\}$

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et trouver une famille génératrice de E.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soient V et W deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de E. Que peut-on dire de $V \cap W$?

Exercice 6

1. On donne les cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, -2, 0, 4);\ v_2 = (0, -3, 0, 1);\ v_3 = (2, -1, 0, 7);\ v_4 = (1, 1, 0, -1);\ v_5 = (2, -4, 0, 8)$$

- Justifier, sans faire de calcul, que les familles suivantes sont liées :

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\ ;\ \{v_1, v_5\}\ ;\ \{v_1, v_2, v_5\}$$

- Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

$$\{v_1, v_2, v_3\}\ ;\ \{v_2, v_3, v_4\}\ ;\ \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

2. Soient w_1, w_2, w_3 trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel E, que peut-on dire des familles

$$\{(w_1 + w_2), (w_1 + w_3), (w_2 + w_3)\}\ et\ \{(w_1 + w_2), (w_1 - w_3), (w_2 + w_3)\}\ ?$$

3. On considère dans $P_3(\mathbb{R})$, les trois polynômes suivants :

$$P_1(x) = x^3 - 1\ ;\ P_2(x) = x^3 - 2x + k\ ;\ P_3(x) = x + 1$$

Où k est un paramètre réel.

Pour quelle valeur de k la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est-elle liée ?

Exercice 7

Soit $P_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Posons $q_0(x) = 1\ ;\ q_1(x) = x - 1\ et\ q_2(x) = (x - 1)^2$

- Vérifier que la famille $\{q_0, q_1, q_2\}$ est une base de $P_2(\mathbb{R})$

Exercice 8

Soit le sous-espace vectoriel

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 3y + 2z - t = 0\}$$

1. Trouver une base de B_1de E.
2. Vérifier que la famille $B_2 = \{(1, 1, 1, 0)\ ;\ (-1, 1, 2, 0)\ ;\ (-3,\ -1, 1, 2)\}$ est une base de E.
3. Donner les composantes du vecteur $v = (2, -2, -3, 2)$ dans les bases de B_1 et B_2.

FIN

www.etude-generale.com