Correction du devoir

Exercice 1 .

On considère les deux points : $A(5,-2)$ *et* $B(2,1)$. *Soit* (C) *l'ensemble des points* M *du plan tel que :* $\frac{MA}{MB}=2$.

1. **a)** *Montrons :* $M(x,y)\in(C) \iff x^2+y^2-2x-4y-3=0$.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \ \epsilon \ (C) &\iff \frac{MA}{MB}=2\\
&\iff MA=2MB\\
&\iff MA^2=4MB^2\\
&\iff (5-x)^2+(2+y)^2=4(2-x)^2+4(1-y)^2\\
&\iff \left(x^2-10x+25\right)+\left(y^2+4y+4\right)=4\left(x^2-4x+4\right)+4\left(y^2-2y+1\right)\\
&\iff x^2-4x^2+y^2-4y^2-10x+16x+4y+8y+25+4-20=0\\
&\iff -3x^2-3y^2+6x+12y+9=0\\
&\iff x^2+y^2-2x-4y-3=0
\end{aligned}$$

Donc

$$M(x,y)\in(C) \iff x^2+y^2-2x-4y-3=0.$$

b) *On a*

$$\begin{aligned}
M(x,y) \ \epsilon \ (C) &\iff x^2+y^2-2x-4y-3=0\\
&\iff (x-1)^2+(y-2)^2-1-4-3=0\\
&\iff (x-1)^2+(y-2)^2=8
\end{aligned}$$

Donc (C) *est un cercle de centre* $\Omega(1,2)$ *et de rayon* $R=2\sqrt{2}$.

2. *On considère la droite* (Δ) *d'équation* $\left(2+\sqrt{3}\right)x+y-\left(8+5\sqrt{3}\right)=0$.

a) *Vérifions que :* $A\in(\Delta)$.

On a

$$\begin{aligned}
\left(2+\sqrt{3}\right)x_A+y_A-\left(8+5\sqrt{3}\right) &= \left(2+\sqrt{3}\right)\times 5-2-\left(8+5\sqrt{3}\right)\\
&= 10+5\sqrt{3}-2-8-5\sqrt{3}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $A\in(\Delta)$.

Vérifions que (Δ) est tangente au cercle (C).

$$\begin{aligned} d(\Omega,(\Delta)) &= \frac{\left|\left(2+\sqrt{3}\right)x_\Omega + y_\Omega - \left(8+5\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}} \\ &= \frac{\left|\left(2+\sqrt{3}\right)\times 1 + 2 - \left(8+5\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}} \\ &= \frac{\left|2+\sqrt{3}-6-5\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}} \\ &= \frac{\left|4+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} \\ &= \frac{4\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R. \end{aligned}$$

Donc la droite (Δ) est tangente au cercle (C).

b) *Montrer que : $(\Delta)\cap(C) = \left\{E\left(2+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)\right\}$.*

On a

$$\begin{aligned} \left(2+\sqrt{3}\right)x_E + y_E - \left(8+5\sqrt{3}\right) &= \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right) - \left(8+5\sqrt{3}\right) \\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)^2 - 7 - 4\sqrt{3} \\ &= \left(7+4\sqrt{3}\right) - 7 - 4\sqrt{3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $E\in(\Delta)$.

On a

$$\begin{aligned} x_E^2 + y_E^2 - 2x_E - 4y_E - 3 &= \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(2+\sqrt{3}\right) - 4\left(1+\sqrt{3}\right) - 3 \\ &= \left(7+4\sqrt{3}\right) + \left(4+2\sqrt{3}\right) - 4 - 2\sqrt{3} - 4 - 4\sqrt{3} - 3 \\ &= \left(7+4\sqrt{3}\right) + \left(4+2\sqrt{3}\right) - \left(7+4\sqrt{3}\right) - \left(4+2\sqrt{3}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $E\in(C)$. Ceci signifie que la droite (Δ) est tangente au cercle (C) en E.

3. *L'équation cartésienne de la droite (Δ') qui passe par E et perpendiculaire à (AB).*

   Comme $(\Delta')\perp(AB)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3,3)$ est un vecteur normal à la droite

(Δ') .

$$\begin{array}{rcl} M(x,y)\ \epsilon\ (\Delta') & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{AB}=0 \\ & \Longleftrightarrow & -3\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)+3\left(y-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & -3\left(x-2-\sqrt{3}\right)+3\left(y-1-\sqrt{3}\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & -3x+6+3\sqrt{3}+3y-3-3\sqrt{3}=0 \\ & \Longleftrightarrow & -3x+3y+3=0 \\ & \Longleftrightarrow & -x+y+1=0 \end{array}$$

Donc une équation cartésienne de (Δ') *est :* $-x+y+1=0$.

4. *La droite* (Δ') *coupe le cercle* (C) *en un autre point* F.

a) *On cherche le point* F.

$$\begin{array}{rcl} F(x,y)\ \epsilon\ (\Delta')\cap(C) & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} -x+y+1=0 \\ x^2+y^2-2x-4y-3=0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ x^2+y^2-2x-4y-3=0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2-2(y+1)-4y-3=0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ (y^2+2y+1)+y^2-2y-2-4y-3=0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ 2y^2-4y-4=0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ y^2-2y-2=0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ y=1-\sqrt{3} \end{array}\right. \ ou\ \left\{\begin{array}{c} x=y+1 \\ y=1+\sqrt{3} \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} x=2-\sqrt{3} \\ y=1-\sqrt{3} \end{array}\right. \ ou\ \left\{\begin{array}{c} x=2+\sqrt{3} \\ y=1+\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}$$

Comme $F\neq E\left(2+\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right)$, *alors* $F\left(2-\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right)$.

b) *Montrons que la droite* (AF) *est tangente au cercle* (C).

On a $F\in(C)$. (1)

D'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\Omega F}.\overrightarrow{AF} & = & \left(1-\sqrt{3}\right)\left(-3-\sqrt{3}\right)+\left(-1-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) \\ & = & 0 \end{array}$$

donc $(\Omega F)\perp(AF)$ (2).

D'après (1) *et* (2) *on en déduit que la droite* (AF) *est tangente au cercle* (C).

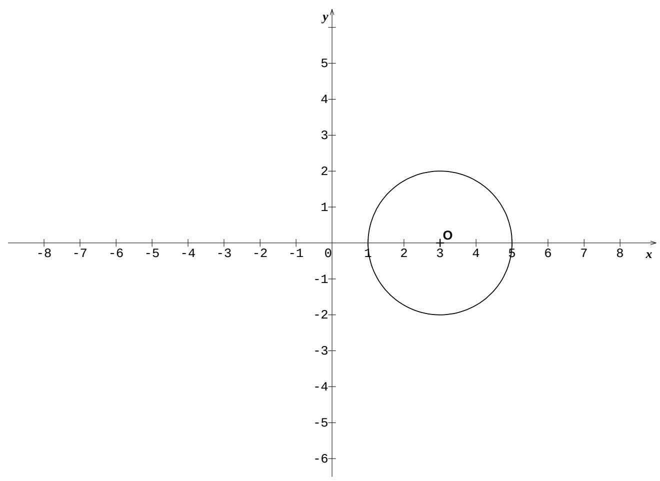
Exercice 2 .

On considère les points : $A\left(2,\sqrt{3}\right)$; $I\left(4,\sqrt{3}\right)$ *et* $J\left(5,0\right)$.
Soit (Γ) *l'ensemble des points* $M\left(x,y\right)$ *du plan tels que :* $x^2+y^2-6x+5=0$.

1. *On a*

$$\begin{array}{rcl} M\left(x,y\right)\ \epsilon\ \left(\Gamma\right) & \Longleftrightarrow & x^2+y^2-6x+5=0 \\ & \Longleftrightarrow & \left(x-3\right)^2-9+y^2+5=0 \\ & \Longleftrightarrow & \left(x-3\right)^2+y^2=4. \end{array}$$

Donc (C) *est un cercle de centre* $\Omega\left(3,0\right)$ *et de rayon* $R=2$.



2. **a)** *Vérifions que* $A\in\left(\Gamma\right)$.
On a

$$\begin{array}{rcl} x_A^2+y_A^2-6x_A+5 & = & 4+3-6\times2+5 \\ & = & 7-12+5 \\ & = & 0. \end{array}$$

Donc $A\in\left(\Gamma\right)$.

b) *L'équation cartésienne de la tangente* (D) *au cercle en* A.
Soit $M\left(x,y\right)$*un point du plan.*

$$\begin{array}{rcl} M\left(x,y\right)\ \epsilon\ \left(D\right) & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{\Omega A}=0 \\ & \Longleftrightarrow & \left(2-x\right)\left(2-3\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-y\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & x-\sqrt{3}y+1=0 \end{array}$$

Donc une équation cartésienne de (D) *est :* $x-\sqrt{3}y+1=0$.

3. *L'équation cartésienne de la droite* $(\triangle)$.

a) *On a* $\overrightarrow{u}\left(\sqrt{3},1\right)$ *est un vecteur directeur à la droite* (D) *.Comme* $(D)\perp(\Delta)$*, alors* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur normal à la droite* (Δ).

$$\begin{aligned} M(x,y)\ \epsilon\ (\Delta) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u}=0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{3}(x-4)+\left(y-\sqrt{3}\right)=0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0. \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de (Δ) *est :* $\sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0.$

b) *Montrons que :* $(\Delta)\cap(C)=\{I,J\}$.

$$\begin{aligned} M(x,y)\ \epsilon\ (\Delta)\cap(\Gamma) &\Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0 \\ x^2+y^2-6x+5=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-\frac{\sqrt{3}y}{3} \\ \left(5-\frac{\sqrt{3}y}{3}\right)^2+y^2-6\left(5-\frac{\sqrt{3}y}{3}\right)+5=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-\frac{\sqrt{3}y}{3} \\ \left(25-\frac{10\sqrt{3}y}{3}+\frac{3y^2}{9}\right)+y^2-30+2\sqrt{3}y+5=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-\frac{\sqrt{3}y}{3} \\ \frac{4}{3}y^2-\frac{4}{3}\sqrt{3}y=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-\frac{\sqrt{3}}{3}y \\ \frac{4y}{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-\frac{\sqrt{3}}{3}y \\ y=0\quad ou\quad y=\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \left(y=0\quad et\ x=5-\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)\quad ou\quad \left(y=\sqrt{3}\quad et\ x=5-\frac{\sqrt{3}}{3}y\right) \\ &\Longleftrightarrow (y=0\ et\ x=5)\quad ou\quad \left(y=\sqrt{3}\ et\ 4\right) \end{aligned}$$

Donc

$$(\Delta)\cap(\Gamma)=\{I,J\}$$

4. *Calculons* $\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)$ *et* $\sin\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)$:

■ $\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)$.

On a $\overrightarrow{AI}(2,0)$ *et* $\overrightarrow{AJ}\left(3,-\sqrt{3}\right)$*, donc* $AI=\sqrt{4+0}=2$ *et* $AJ=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$ *et* $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=6$*. Donc*

$$\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}}{AI.AJ}=\frac{6}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

■ $\sin\left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)$.

On a $\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = -2\sqrt{3}$. *Donc*

$$\sin\left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)}{AI.AJ} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\times 2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2} \quad (2)$$

D'après (1) *et* (2) *on en déduit que* $\frac{5\pi}{6}$ *est une mesure de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com