Correction du devoir

Exercice 1 .

1. *Montrons que :* $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

   On a G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ *et* M *est le barycentre du système pondéré* $\{(B,1);(C,1)\}$. *D'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,2);(M,2)\}$. *Alors*

$$\begin{array}{rcl} 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GA} & = & \overrightarrow{0} \\ & \Longleftrightarrow & 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0} \\ & \Longleftrightarrow & 4\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AM} \\ & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM} \end{array}$$

■ *Montrons que :* $\overrightarrow{NG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{NC}$.

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{NG} & = & \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AG} \\ & = & -\overrightarrow{AN} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ & = & -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ & = & -\dfrac{1}{12}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\overrightarrow{NC} \end{array}$$

Donc

$$\overrightarrow{NG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{NC}$$

2. *Montrons que* (AM) *et* (CN) *sont sécantes.*

   On a G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,2);(M,2)\}$. *Ceci signifie que* $G \in (AM)$. (1)

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{NC} \\ &\iff \overrightarrow{NG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GC}\right) \\ &\iff \overrightarrow{NG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{NG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GC} \\ &\iff \frac{3}{4}\overrightarrow{NG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GC} \\ &\iff 3\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{GC} \\ &\iff 3\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

comme $(3+1 \neq 0)$, *alors* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(N,3),(C,1)\}$. *Ceci signifie que* $G \in (CN)$. (2)

D'après (1) *et* (2) *on en déduit que les droites* (AM) *et* (CN) *sont sécantes et leur point d'intersection est* G.

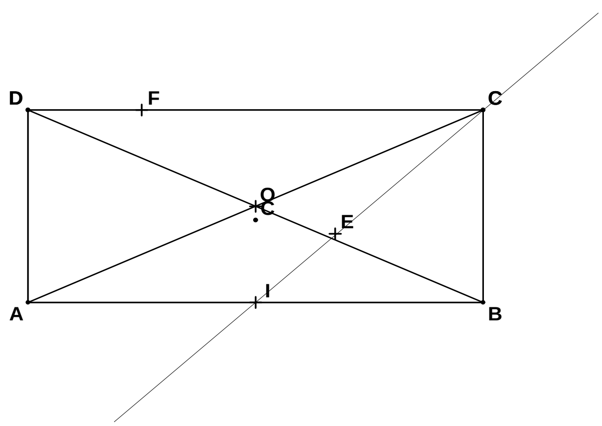
Exercice 2 .

1. ■ *La construction du point F.*

   On a F *est le barycentre du système pondéré* $\{(C,1).(D,3)\}$. *Alors*

$$\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$$

   ■ *On a* E *est le centre de gravité du triangle* ABC. *Ceci signifie que* E *est l'intersection des droites* (OB) *et* (IC).



2. *Soit* G *le milieu du segment* $[ED]$.

   Montrons que G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$.

   Notons H *le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$, *et comme* E *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$. *D'après l'associativité du barycentre on en déduit que* H *est le barycentre du système pondéré* $\{(E,3);(D,3)\}$. *Donc* H *est le milieu du segment* $[ED]$. *Ceci signifie que* $H = G$, *d'où* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$.

3. *Montrons que :* $G \in (IF)$.

   On a G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$ *et* I *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1)\}$*. D'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(I,2);(C,1);(D,3)\}$ *. D'autre part, on a* F *est le barycentre du système pondéré* $\{(C,1).(D,3)\}$ *.D'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(I,2);(F,4)\}$ *. Ceci signifie que* $G \in (IF)$ *.*

4. *Soit* K *le point défini par :* $4\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AD}$*.*

   a) *On détermine* (A,α) *et* (D,β) *.*

   On a

$$
\begin{array}{rcl}
4\overrightarrow{AK} & = & 3\overrightarrow{AD} \\
 & \Longleftrightarrow & 4\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KD} \\
 & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0} \\
 & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}
\end{array}
$$

   Donc K *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(D,3)\}$ *.*

   b) *Montrons que le milieu du segment* $[BC]$ *appartient à* (GK) *:*

   Notons I' *le milieu du segment* $[BC]$ *.*

   On a G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$ *et comme* I' *est le barycentre du système pondéré* $\{(B,1);(C,1)\}$*. D'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(I',2);(D,3)\}$ *. D'autre part, on a* K *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1).(D,3)\}$ *.D'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(I',2);(K,4)\}$ *. Ceci signifie que* $I' \in (GK)$ *.*

5. *On détermine l'ensemble des points* M *du plan :*

$$
\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MD}\right\|
$$

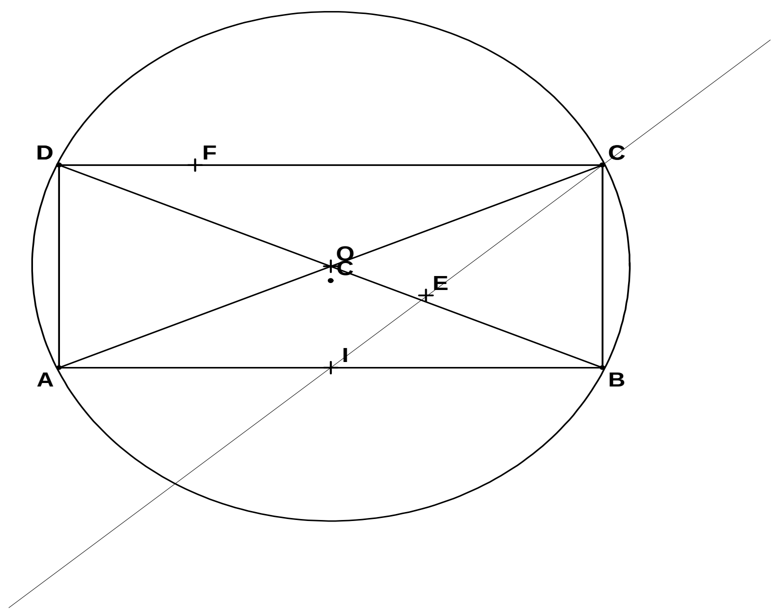
   :

   On a O *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$ *.*

Soit $M \in (P)$.

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| &= \left\|4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}\right\| \\
&\Longleftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MO}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}\right\| \\
&\Longleftrightarrow 4MO = \left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{DM}\right\| \\
&\Longleftrightarrow 4MO = \left\|2\overrightarrow{MA}+\left(2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AM}\right)+2\overrightarrow{MA}+\left(2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AM}\right)\right\| \\
&\Longleftrightarrow 4MO = \left\|2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{DA}\right\| \\
&\Longleftrightarrow 4MO = 2\left\|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}\right\| \\
&\Longleftrightarrow MO = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right\| \\
&\Longleftrightarrow MO = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \\
&\Longleftrightarrow MO = AO
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des points M *du plan est le cercle de centre* O *est de rayon* AO.



FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com