

Série d'exercices N1 sur les suites numériques

Exercice 1 .

Calculer en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants

:

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k - 5^{2k}}{\pi^{k+1}} \quad \text{et} \quad u_n = \prod_{k=1}^n 2^k \cdot \pi^{3-k}$$

Exercice 2 On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 4$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, on déterminera son raison.
- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k + 1}$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

Exercice 3 On considère les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{3^n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

2. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n .

3. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + n + 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right)$$

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n - n - 2$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com