Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices N1 sur l'étude des fonctions numériques

Exercice 1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1}$$

1. **a)** *Montrer que $D_f = \mathbb{R}^*$.*

   b) *Calculer $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.*

2. **a)** *Montrer que : $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.*

   b) *Déduire $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

3. *Calculer $\lim_{x \longrightarrow 0} x.f(x)$.*

4. *Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $f(x) = 1$.*

5. *Montrer que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad \frac{|x| - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2+2} - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1}.$$

Exercice 2 .

- *On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 3x - 18\right)$$

1. *Étudier les variations de la fonction g.*
2. **a)** *Montrer que la courbe (C_g) admet un unique point d'inflexion A qu'on déterminera.*

   b) *Écrire l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_g) au point A.*
3. *Étudier les branches infinies de la courbe (C_g).*
4. *Construire (T) et la courbe (C_g) dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.*

- *On considère la fonction numérique f définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right)$$

1. **a)** *Déterminer D l'ensemble de définition de f.*
   b) *Déterminer les limites de f aux bornes de D.*
2. **a)** *Montrer que pour tout $x \in D$:*

$$f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

   b) *Dresser le tableau de variations de f.*
3. *Étudier la position relative de la courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ).*
4. *Construire (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*
5. *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation :*

$$x^3 - 3mx^2 + 3m + 9 = 0.$$

6. *À partir de la courbe (C_f) construire la courbe représentative de la fonction $h : x \longmapsto |f(x)|$.*

Exercice 3 *Soit f la fonction numérique définie par :*

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. *Déterminer D l'ensemble de définition de f puis déterminer le limite de f aux bornes de D.*
2. *Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).*
3. *Étudier la position relative de la courbe (C_f) et son asymptote oblique.*
4. **a)** *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$$

   b) *Étudier les variations de la fonction f.*
5. *Montrer que le point I d'abscisse 3 est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).*
6. *Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

   et en déduire les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.
7. *Construire la courbe (C_f).*

8. *Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.*

9. *Soit g la fonction numérique définie par :*

$$g(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| . \left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

a) *Étudier la dérivabilité de la fonction g en 1 et -1, puis interpréter les résultats obtenus.*

b) *En utilisant la courbe (C_f), construire la courbe (C_g) de la fonction g.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**