

## Série d'exercices sur les ensembles

### Exercice 1 .

On considère les deux ensembles :

$$A = \left\{ \frac{5+4k}{10} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{5+8k'}{20} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que :  $A \cap B = \emptyset$ .

### Exercice 2 .

Soient les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{9\pi}{4} - \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad C = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Montrer que :  $A = B$ .

2. Montrer que :  $A \cap C = \emptyset$ .

### Exercice 3 .

Déterminer en extension les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x^2 - x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et}$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \left| \frac{|3x| - 4}{2} \right| < 1 \right\}$$

### Exercice 4 .

On considère l'ensemble suivant :  $E = \left\{ \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} / x \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$ .

1. Montrer que :  $E \subset ]0, 1]$ .

2. a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $\sqrt{x + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} + \sqrt{x}$ .

b) A-t-on  $]0, 1] \subset E$  ?

### Exercice 5 .

On considère les ensembles :

$$E = \{2k - 1 / k \in \mathbb{Z}\}, \quad F = \left\{ \frac{2k - 1}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \frac{4 - \sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}} / x \in [0, +\infty[ \right\}$$

1. a) Montrer que :  $8 \notin F$ .

b) Montrer que :  $E \subset F$ .

c) Montrer que :  $F \not\subset E$ .

2. Montrer que :  $G = ]-1, 1]$ .

**Exercice 6** Soient  $A, B$  et  $C$  trois parties de  $E$ .

1. Montrer que :  $A \cap B \subset A \cap C$  et  $A \cup B \subset A \cup C \implies B \subset C$ .

2. Montrer que :  $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ .

3. Montrer que :  $\begin{cases} A \cap C \neq \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{cases} \implies A \cap \bar{B} \neq \emptyset$

4. Montrer que :  $A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$ .

5. Montrer que :  $A \cap B = \emptyset \implies A = (A \cup B) \setminus B$ .

6. Montrer que :  $\mathcal{C}_{E \times E}^{A \times B} = (\mathcal{C}_E^A \times E) \cup (E \times \mathcal{C}_E^B)$ .

**Exercice 7** .

On considère l'ensemble suivant :  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\}$ .

1. Montrer que :  $E \neq \emptyset$ .

2. Montrer que :  $E \subset [0, 9] \times [0, 9]$ .

3. A-t-on  $E = [0, 9] \times [0, 9]$  . ?

**FIN**

Pr : **Yahya MATIOUI**

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)