www.etude-generale.com 1 SM
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices sur les applications

Exercice 1 .

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

2. *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccl} f & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^4 - 3x^2 - 10 \end{array}$$

   a) *Déterminer* $f^{-1}(\{-6\})$. *Que peut-on en déduire ?*

   b) *Déterminer* $f(\mathbb{R})$. *L'application* f *est-elle surjective ? Justifier.*

Exercice 2 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccl} f & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 + x + 2 \end{array}$$

1. *Montrer que l'application* f *est injective.*

2. **a)** *Calculer* $f(-1)$.

   b) *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :* $f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

Exercice 3 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccl} f & : [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

1. **a)** *Montrer que pour tout* x *et* x' *de* $[1, +\infty[$:

$$x.x' \implies x = x' = 1$$

   b) *En déduire que* f *est injective.*

2. **a)** *Vérifier que :* $(\forall x \in [1, +\infty[) , \quad f(x) \geq 2.$

   b) *L'application* f *est-elle surjective ?*

3. *Déterminer un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *pour lequel* f *réalise une bijection de* $[1, +\infty[$ *sur* J.

Exercice 4 .

1. *Soient* $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ *et* $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

   Montrer que :

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{2}$$

2. *Soit* $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *l'application définie par :*

$$f(p,q) = p + \frac{1}{q}$$

   a) *Montrer que* f *est injective.*

   b) f *est-elle surjective ?*

Exercice 5 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1} \end{array}$$

1. **a)** *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}), \quad f(x) < 1.$

   b) *En déduire que* f *n'est pas surjective.*

2. **a)** *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}), \quad f(-x-2) = f(x).$

   b) *L'application* f *est-elle injective ?*

3. *Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $]-1, +\infty[$.

   a) *Montrer que* g *réalise une bijection de* $]-1, +\infty[$ *sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$.

   b) *Déterminer* $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in]-\infty, 1[$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**