

Devoir surveillé

Durée 2H

Exercice 1 .

1. Soient a, b, x et y des réels non nuls.

Montrer que :

$$ax + by = 1 \implies \frac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$$

2. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in (]0, +\infty[)^2, \quad a^2 = b + 1 \implies \frac{\sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}} = 1$$

3. Soient a, b et c des réels.

a) Vérifier que : $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

b) Montrer que :

$$|ab| \succ \frac{c^2}{2} \implies |a - b| \succ c \quad \text{ou} \quad |a + b| \succ c$$

4. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^2, \quad y \neq \frac{-3}{4}x \implies \frac{x - y}{x + y} \neq 7$$

5. n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2 .

1. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in ([0, +\infty[)^2, \quad \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1} < \sqrt{a} - \sqrt{b} \iff a \succ b$$

2. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \iff x = y = 0$$

3. Soient a et b deux réels non nuls.

a) Montrer que :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(b + \frac{1}{b}\right) \iff \left(a = b \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{b}\right)$$

b) Dédurre l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$.

Exercice 3 .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $u_n = (1 + 1)^2 \times (1 + \frac{1}{3})^2 \times (1 + \frac{1}{5})^2 \times \dots \times (1 + \frac{1}{2n+1})^2$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n (1 + \frac{1}{2n+3})^2$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2n + 3$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 6$ divise $n(n + 1)(n + 2)$.

Exercice 4 .

Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant :

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + xy - y + y^2 = 0 \end{cases}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)