Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Devoir surveillé

Durée 2H

Exercice 1 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}$$

1. *Déterminer D_f.*
2. **a)** *Montrer que f est minorée par* 0.
   b) 0 *est-il un minimum de f ? justifier votre réponse.*
3. **a)** *Montrer que f est majorée par* 2.
   b) 2 *est-il un maximum de f ? justifier votre réponse.*
4. *Montrer que f est strictement décroissante sur D_f.*

Exercice 2 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

1. **a)** *Montrer que f est impaire.*
   b) *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) \leq 1$ *et* $(\forall x \in \mathbb{R}^*),\ f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.
2. *f est elle surjective ? est-elle injective ? Justifier chaque réponse.*
3. **a)** *Montrer que :* $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{2(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$, *où $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $a \neq b$.*
   b) *Montrer que f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur $[0, 1]$.*
4. **a)** *Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.*
   b) *Montrer que :* $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2),\ a + b \geq \sqrt{3} \implies \frac{(a+b)^2+1}{a+b} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
5. *Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$. On pose $J =]0, 1]$.*
   Montrer que g est une bijection de I sur J et donner sa bijection réciproque g^{-1}.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**