Correction de la série d’exercices sur les emprunts obligataires

Exercice 1

1. Ici on a :

C = 50 000 000 dh, $V = \frac{50\ 000\ 000}{10\ 000} = 5\ 000$ dh

R = 5 500 dh

Soit, $i' = \frac{V}{R} i = 0,1090909$

Le premier nombre d’obligations amorties s’écrit :

$m_1 = 10\ 000 \times \frac{0,1090909}{1,1090909^5 - 1} = 1\ 608,61$

En multipliant à chaque fois par 1, 1090909, on obtient les autres nombres d’obligations amorties :

$m_2 = 1\ 784,09$

$m_3 = 1\ 978,72$

$m_4 = 2\ 194,58$

et $m_5 = 2\ 433,88$

On forme le cumul de ces nombres qu’on arrondit à l’entier le plus voisin ; par soustraction on obtient les nombres d’obligations arrondis qui permettent la construction du tableau d’amortissement :

Cumuls théoriques	Cumuls	Cumul arrondis	NOA
1 608,61	1 608,61	1 609	1 609
1 784,09	3 392,70	3 393	1 784
1 978,72	5 371,43	5 371	1 978
2 194,58	7 566,01	7 566	2 195
2 433,99	10 000,00	10 000	2 434

2. Le tableau d’amortissement se présente comme suit (en milliers de dh) :

Période	CDP	I	NOA	AMORT	REMB	ANNU	CFP
1	50 000,00	6 000,00	1 609	5 045,00	8 849,50	14 849,50	41 955,00
2	41 955,00	5 034,60	1 784	8 920,00	9 812,00	14 846,60	33 035,00
3	33 035,00	3 946,00	1 978	9 890,00	10 879,00	14 843,20	23 145,00
4	23 145,00	2 777,40	2 195	10 975,00	12 072,50	14 849,90	12 170,00
5	12 170,00	1 460,40	2 434	12 170,00	13 387,00	14 847,40	0

Exercice 2

La société doit payer à la fin de chaque année pour les 61 premières obligations la somme de :

$30\,100 + 10 \times 8\,000 + 50 \times 5\,000 = 360\,100$ dh

Soit une prime nette de :

$360\,100 - 61 \times 3\,500 = 146\,000$ dh

Comme cette prime est constante, la construction du tableau d'amortissement ne pose pas de problème. Les amortissements restent en progression géométrique de raison 1,105.

Le tableau d'amortissement se présente comme suit (en milliers de dh) :

Période	CDP	I	NOA	AMORT	PRIME	ANNU	CFP
1	63 000,00	6 615,00	1 546	5 411,00	146,60	12 172,60	57 589,00
2	57 589,00	6 064,85	1 708	5 978,00	146,60	12 171,45	51 611,00
3	51 611,00	5 419,16	1 887	6 604,50	146,60	12 170,26	45 006,50
4	45 006,50	4 725,68	2 085	7 297,50	146,60	12 169,78	37 709,00
5	37 709,00	3 959,45	2 305	8 067,50	146,60	12 173,55	29 641,50
6	29 641,50	3 112,36	2 546	8 911,00	146,60	12 169,96	20 730,50
7	20 730,50	2 176,70	2 814	9 849,00	146,60	12 172,30	10 881,50
8	10 881,50	1 142,56	3 109	10 881,50	146,60	12 170,66	0

Exercice 3

Ici on a : $V = 2\,500$ dh $\left(= \frac{62\,500\,000}{25\,000}\right)$, $R = 2\,800$ dh

$i = 0{,}13$ et $V_i = 325$ dh

Cas de l'obligataire emboursé à la fin de la $1^{ère}$ année :

A la date 0 ; il verse 2 500 dh

A la date 1 ; il reçoit 3 125 dh

<u>A la date 1 on a :</u>

$2\,500(1 + t) = 3\,125 \Leftrightarrow t = 0{,}25$ soit 25%

Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 2ème année :

A la date 0 ; il verse 2 500 dh

A la date 1 ; il reçoit 325 dh

A la date 2 ; il reçoit 3 125 dh

<u>A la date 2 on a :</u>

$2\,500(1+t)^2 = 325(1+t) + 3\,125$

La résolution donne $t = 0{,}1849$, soit 18,49%

Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 8ème année :

A la date 0 ; il verse 2 500 dh

A la date 1 ; il reçoit 325 dh

……………………………………………......

A la date 8 ; il reçoit 325 + 2 800 = 3 125 dh

<u>A la date 8 on a :</u>

$2\,500(1+t)^8 = 325\frac{(1+t)^8-1}{t} + 2\,800$

Ou encore

$2\,500(1+t)^8 - 325\frac{(1+t)^8-1}{t} = 2\,800$

Par tâtonnement, puis par interpolation linéaire, on trouve

$t = 0{,}1391$; soit 13,91%

On remarque donc que le taux de rendement diminue, cette situation s'explique par le fait que la prime de remboursement, qui est de 300 dh (= 2 800 – 2 500) a plus de valeur à la fin de la 1ère année qu'à la fin de la 2ème année ; elle a beaucoup moins de valeurs à la fin de la 8ème année.

Exercice 4

a. Ici on a : $V = \frac{48\,750\,000}{15\,000} = 3\,250$ dh

$i = 0{,}125 \;\; V_i = 406{,}25$ dh

L'obligation est achetée à une valeur E = 3 000 dh, inférieur à la valeur nominale, soit une prime d'émission de 250 dh par obligation.

b. Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 1ère année :

A la date 0 ; il verse 3 000 dh

A la date 1 ; il reçoit 406,25 dh

A la date 1 on a :

$$3\,000(1+t) = 3\,250 + 406{,}25$$

$$\Leftrightarrow t = 0{,}21875 \text{ soit } 21{,}88\%$$

Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 2ème année :

A la date 0 ; il verse 3 000 dh

A la date 1 ; il reçoit 406,25 dh

A la date 2 ; il reçoit 3 656,25 dh

A la date 2 on a :

$3\,000(1+t)^2 = 406{,}25(1+t) + 3\,656{,}25$

Ce qui donne $t = 0{,}1738$ soit 17,38%

Cas de l'obligataire remboursé à la fin de la 6ème année :

A la date 0 il verse 3 000 dh

A la date 1 il reçoit 406,25 dh

………………………………………………………….

A la date 6 il reçoit 3 656,25 dh

A la date 6 on a :

$$3\,000(1+t)^6 = 406{,}25\,\frac{(1+t)^6-1}{t} + 3\,250$$

$$\text{On trouve } t = 0{,}1451 \qquad \text{soit } 14{,}51\%$$

On remarque là également que le taux de rendement diminue. Dans le fond, cette situation ne diffère pas de la précédente (exercice 3). En effet, on peut considérer ici que la valeur nominale est de 3 000 dh et que la valeur de remboursement est de 3 250 dh ; dans ce cas, le taux d'intérêt initial n'est plus de 12,50% mais de 13,54% à peu près ($i' = \frac{406{,}25}{3\,000}$) .

Exercice 5

1. Ici les nombres d'obligations amorties ne sont pas constants. Ils ne sont pas non plus en progression arithmétique ; en effet :

   $m_2 - m_1 = 404$ et $m_3 - m_2 = 451$

   L'écart est trop grand.

$\frac{m_2}{m_1} = 1,1124$ *et* $\frac{m_3}{m_2} = 1,1128$

Ainsi $\frac{m_2}{m_1} \neq \frac{m_3}{m_2}$

Les nombres d'obligations amorties semblent être en progression géométrique (on retiendra comme q = 1,1125). Le système adopté ici est celui de l'amortissement par annuités constantes.

2. Ici on a :

$$V = \frac{M_1}{m_1} = \frac{16\,177\,500}{3\,595} = 4\,500 \text{ dh}$$

$$\text{et} \quad R = \frac{17\,256\,000}{3\,595} = 4\,800 \text{ dh}$$

$$i' = \frac{V_i}{R} = 0,1125 \qquad \Rightarrow i = \frac{Ri'}{V} = 0,12$$

Soit 12%

L'intérêt de la première année s'écrit :

$$I_1 = a_1 - m_1 R = 29\,406\,000 - 17\,256\,000$$

$$I_1 = 12\,150\,000 \text{ dh}$$

D'où

$$C = \frac{I_1}{i} = \frac{12\,150\,000}{0,12} = 101\,250\,000 \text{ dh}$$

3. Le nombre total d'obligation est égal à :

$N = \frac{C}{V} = 22\,500$ obligations

On sait que $m_1 = N\frac{i'}{(1+i')^n - 1}$

Ce qui donne$1,1125^n = 1,7041$

Par logarithmes, on trouve n = 5

Exercice 6

Comme le remboursement se faut à une valeur (3 000 dh par obligation) supérieure à la valeur nominale (2 750 dh par obligation), l'emprunt va revenir à la société plus chère qu'il ne devrait l'être. Le taux réel sera donc supérieur à 12%. Le taux réel de l'emprunt est celui qui égalise le capital perçu par la société et les engagements actualisés de celui-ci. Il est important donc de calculer les annuités de remboursement.

a. Amortissements constants :

Le tableau d'amortissement se présente comme suit (en milliers de dh) :

Période	CDP	I	NOA	AMORT	REMB	ANNU	CFP
1	41 250	4 950	3 000	8 250	9 000	13 950	33 000
2	33 000	3 960	3 000	8 250	9 000	12 960	24 750
3	24 750	2 970	3 000	8 250	9 000	11 970	16 500
4	16 500	1 980	3 000	8 250	9 000	10 980	8 250
5	8 250	990	3 000	8 250	9 000	9 990	0

A la date 0 on a :

$$13\,950(1+\mathrm{t})^{-1} + 12\,960(1+\mathrm{t})^{-2} + 11\,970(1+\mathrm{t})^{-3} + 10\,980(1+\mathrm{t})^{-4} + 9\,900(1+\mathrm{t})^{-5} = 41\,250$$

Par tâtonnement puis par interpolation linéaire, on trouve :$t = 0{,}1478 \; soit \; 14{,}78\%$

b. Annuités constants :

Le tableau d'amortissement devient : (en milliers de dh)

Période	CDP	I	NOA	AMORT	REMB	ANNU	CFP
1	41 250	4 950	2 409	6 625	7 227	12 177	34 625
2	34 625	4 155	2 673	7 351	8 019	12 174	27 275
3	27 275	3 273	2 968	8 162	8 904	12 177	19 113
4	19 113	2 294	3 294	9 059	9 882	12 176	10 054
5	10 054	1 206	3 656	10 054	10 968	12 174	0

A la date 0 on a :

$$12\,177(1+\mathrm{t})^{-1} + 12\,174(1+\mathrm{t})^{-2} + 12\,177(1+\mathrm{t})^{-3} + 12\,176(1+\mathrm{t})^{-4} + 12\,174(1+\mathrm{t})^{-5} = 41\,250$$

On trouve : t = 0,1455 soit t = 14,55%

<u>Remarque :</u> ce taux est légèrement inférieur au précédent, cela tient ai fait que les annuités sont, ici, moins fortes les premières années, par rapport au cas précédent. On démontre aisément que l'annuité effective est sensiblement égale à :

$$\mathrm{a} = \mathrm{NR}\frac{\mathrm{i}'}{1 + (1+\mathrm{i}')^{-5}}$$

Ici on a $\quad \mathrm{a} = 15\,000 \times 3\,000\,\frac{0{,}11}{1 - 1{,}11^{-5}}$

$$\mathrm{a} = 12\,175\,663{,}93 \text{ dh}$$

A la date 0 on a :

$12\,175\,663{,}93\,\frac{1-(1+\mathrm{t})^{-5}}{\mathrm{t}} = 41\,250\,000$

D'où : $\frac{1-(1+t)^{-5}}{t} = 3,3879056$

Ce qui donne : t = 0,1455 soit : 14,55%

FIN

www.etude-generale.com

Pr : Ayoub MATIOUI