Correction de la série N1

Exercice 1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x)=\frac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

1. **a)** *Montrons que* : $D_f=\mathbb{R}^*$.

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ \sin x+1+x^2\geq 0 \quad et \quad \sqrt{x^2+1}-1\neq 0 \ \ et \ x^2+1\geq 0\right\}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |\sin x| &\leq 1 \\ &\Longleftrightarrow -1\leq \sin x\leq 1 \\ &\Longleftrightarrow 0\leq \sin x+1\leq 2 \\ &\Longleftrightarrow x^2\leq \sin x+1+x^2\leq 2+x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\ \ \sin x+1+x^2\geq 0 \quad et \quad (\forall x\in\mathbb{R}),\ x^2+1\geq 0$$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}-1 &= 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1 \\ &\Longleftrightarrow x^2+1=1 \\ &\Longleftrightarrow x^2=0 \\ &\Longleftrightarrow x=0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R}/\ \ x\neq 0\} \\ &= \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

b) *Calculons* : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$.

■ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{(\sin x+x^2)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{\sin x+1+x^2}+1\right)} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{\sin x+1+x^2}+1\right)}=-\infty \end{aligned}$$

$$car \quad : \quad \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

■ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(\sin x + x^2)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{\sin x + 1 + x^2}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{\sin x + 1 + x^2}+1\right)} = +\infty \\
car \quad &: \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1
\end{aligned}$$

La courbe (C_f) admet une asymptote vercticale d'équation $x = 0$.

2. **a)** *Montrons que :* $\lim\limits_{|x|\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
|\sin x| &\leq 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \\
&\Longleftrightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \\
&\Longleftrightarrow \frac{-1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}
\end{aligned}$$

comme : $\lim\limits_{|x|\longrightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{|x|\longrightarrow +\infty} -\frac{1}{|x|} = 0$. *Donc, d'après limites et encadrement on en déduit :*

$$\lim_{|x|\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x\left(\sqrt{\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{\frac{\sin x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

3. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x.f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0} x.f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} x.\frac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2\left(\frac{\sin x}{x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{\sin x+1+x^2}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{\sin x+1+x^2}+1\right)} = 1
\end{aligned}$$

4. *On résout dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $f(x)=1$.*

   Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 \\
&\iff \frac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=1 \\
&\iff \sqrt{\sin x+1+x^2}-1=\sqrt{x^2+1}-1 \\
&\iff \sqrt{\sin x+1+x^2}=\sqrt{x^2+1} \\
&\iff \sin x+1+x^2=x^2+1 \\
&\iff \sin x=0 \\
&\iff x=k\pi \quad / \, k\in\mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

   D'où l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S=\{k\pi \quad / \ k\in\mathbb{Z}^*\}$$

5. *Montrons que* : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$, $\frac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\leq f(x)\leq\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
|\sin x| &\leq 1 \\
&\Longleftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow x^2 \leq \sin x + 1 + x^2 \leq x^2 + 2 \\
&\Longleftrightarrow |x| \leq \sqrt{\sin x + 1 + x^2} \leq \sqrt{x^2+2} \\
&\Longleftrightarrow |x| - 1 \leq \sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1 \leq \sqrt{x^2+2} - 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \leq \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \leq \frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \\
&\Longleftrightarrow \frac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \ \frac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

Exercice 2 .

- *On considère la fonction numérique* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 3x - 18\right).$$

1. *Les variations de la fonction* g.
   g *est une fonction polynôme dérivable sur* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{4}\left(3x^2 - 3\right) \\
&= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad g'(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} = 0 \\
&\Longleftrightarrow x^2 = 1 \\
&\Longleftrightarrow x = 1 \ \ ou \ \ x = -1
\end{aligned}$$

D'où on conclut le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a)** *Montrons que la courbe* (C_g) *admet un unique point d'inflexion.*
La fonction g *est deux fois dérivables sur* $\mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ g''(x) = \frac{3}{2}x$$

Donc

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$ 0	$+$
Concavite–de(C)	(C)*concave*	(C)*convexe*

Puisque la fonction g'' *s'annule en* 0 *avec un changement de signe, alors le point* $A\left(0, \frac{-9}{2}\right)$ *est un point d'inflexion de la courbe* (C_g).

b) *L'équation de la tangente* (T) *à la courbe* (C_g) *au point* A.

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

D'où

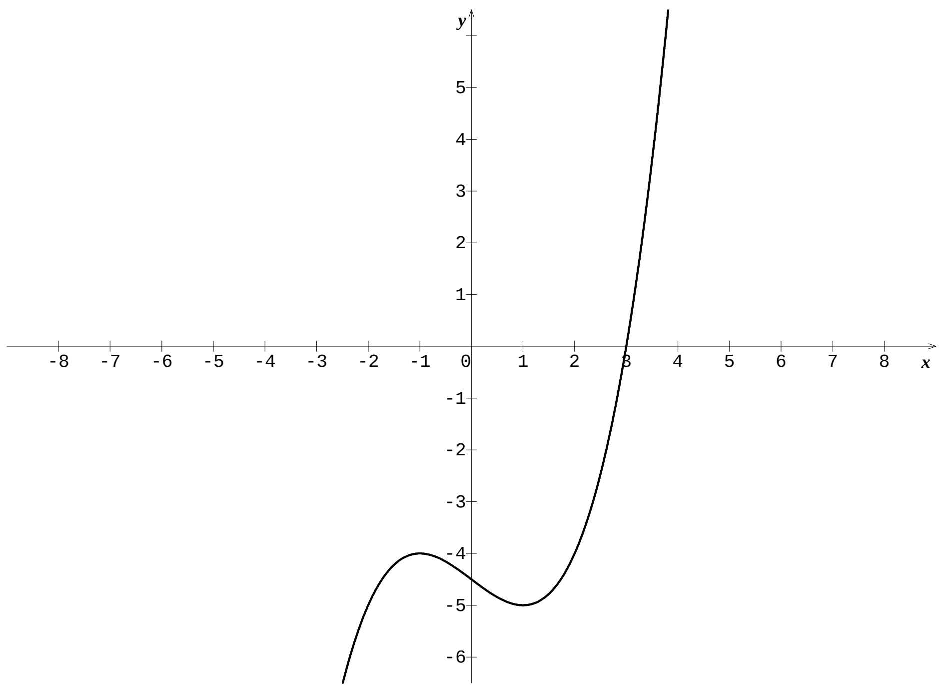
$$(T) : y = \frac{-3}{4}x - \frac{9}{2}.$$

3. *Les branches infinies de la courbe* (C_g).
On a : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, *calculons :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}(x^3 - 3x - 18)}{x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(x^3 - 3x - 18)}{4x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^3}{4x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty \end{aligned}$$

et $\lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, *et* $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.
La courbe (C_g) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

4. *La courbe* (C_g) *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



- *On considère la fonction numérique* f *définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right)$$

1. **a)** *L'ensemble de définition de la fonction* f.

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 1 \neq 0\right\}$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 1 = 0$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont :* -1 *et* 1.
Donc

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq -1 \ \textit{et} \ x \neq 1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \ \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

b) *Les limites de* f *aux bornes de* D.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = -\infty$$

2. **a)** *Montrons que :* $(\forall x \in D)\,,\ f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
La fonction f est dérivable sur D.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{(x^3+9)'(x^2-1) - (x^3+9)(x^2-1)'}{x^2-1} \right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3+9)}{(x^2-1)^2} \right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 - 18x}{(x^2-1)^2} \right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{x^4 - 3x^2 - 18x}{(x^2-1)^2} \right) \\
&= \frac{4}{3} \times \left(\frac{x(x^3 - 3x - 18)}{4(x^2-1)^2} \right) \\
&= \frac{4}{3} \times \left(\frac{x\left(\frac{1}{4} \times (x^3 - 3x - 18)\right)}{(x^2-1)^2} \right) \\
&= \frac{4}{3} \times \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

b) *Comme $(x^2-1)^2 \succ 0$ pour tout $x \in D$. Le signe de $f'(x)$ sur D est celui de $xg(x)$.*
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
xg(x) = 0 &\iff x = 0 \ \text{ou}\ g(x) = 0 \\
&\iff x = 0 \ \text{ou}\ x^3 - 3x - 18 = 0 \\
&\iff x = 0 \ \text{ou}\ (x-3)\left(3x + x^2 + 6\right) = 0 \\
&\iff x = 0 \ \text{ou}\ x = 3 \ \text{ou}\ x^2 + 3x + 6 = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation $x^2 + 3x + 6 = 0$ est : -15. Ceci signifie que l'équation n'admet aucune solution réelle.
D'où

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ x^2 + 3x + 6 \succ 0.$$

Donc

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a)** *Les branches infinies de la courbe* (C_f) *.*

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$*. Calculons :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ *:*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^3+9}{3x^3-3x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{3}x &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) - \frac{1}{3}x \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1} - x\right) \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9-x^3+x}{x^2-1}\right) \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{9+x}{x^2-1}\right) \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{3x^2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De même on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$*, et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = 0$*.*
La courbe (C_f) *admet une asymptote oblique* (Δ) *d'équation* $y = \frac{1}{3}x$ *au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$*.*

b) *On étudie la position relative de la courbe* (C_f) *et son asymptote oblique* (Δ) *.*
On étudie le signe de : $f(x) - \frac{1}{3}x$*.*
Soit $x \in D$*.*

$$f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}\left(\frac{9+x}{x^2-1}\right)$$

- $x + 9 = 0 \iff x = -9$.
- $x^2 - 1 = 0 \iff x = -1$ *ou* $x = 1$.

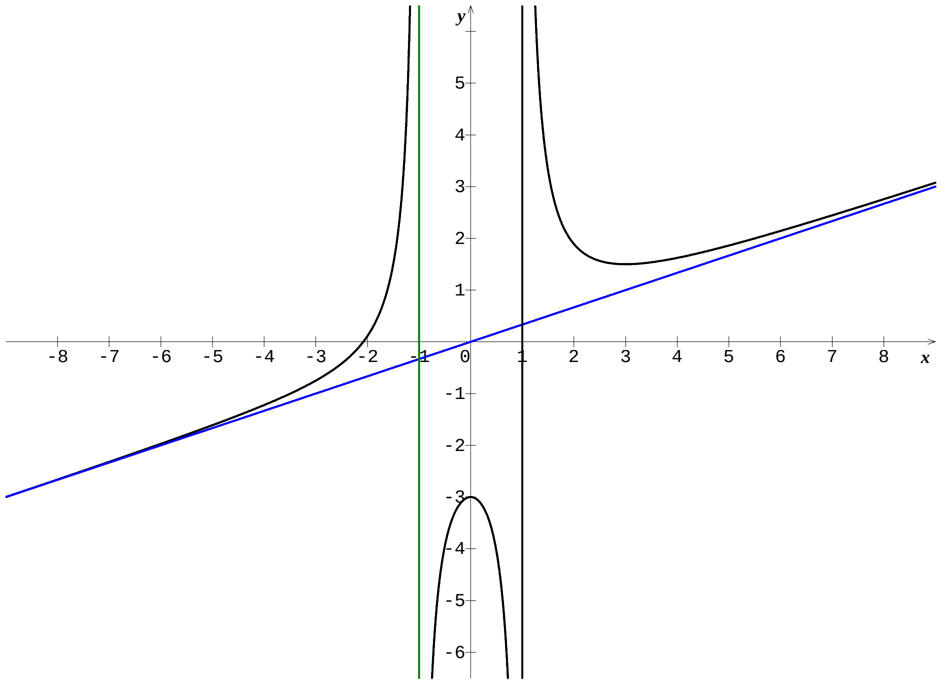
Donc

x	$-\infty$		-9		-1		1		$+\infty$
$9+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x2-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-\frac{1}{3}x$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

- Si $x \in]-\infty, -9[\cup]-1, 1[$ *alors :* $f(x) - \frac{1}{3}x < 0$*. Ceci signifie que* (C_f) *est au dessous de la droite* (Δ) *.*
- Si $x \in]-9, -1[\cup]1, +\infty[$ *alors :* $f(x) - \frac{1}{3}x \succ 0$*. Ceci signifie que* (C_f) *est au dessus de la droite* (Δ) *.*

- ■ *La courbe* (C_f) *et* (Δ) *se coupent en point d'abscisse* -9.

4. *La courbe* (C_f) *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



5. *Soit* $x \in D$.

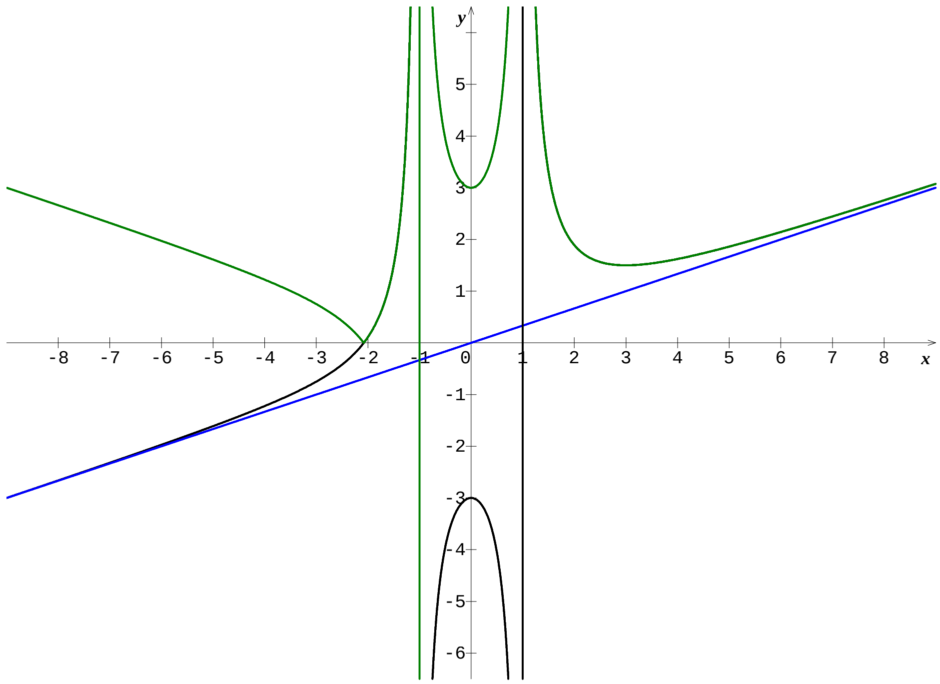
$$\begin{aligned} x^3 - 3mx^2 + 3m + 9 &= 0 \iff x^3 + 9 = 3mx^2 - 3m \\ &\iff x^3 + 9 = 3m\left(x^2 - 1\right) \\ &\iff \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+9}{x^2-1}\right) = m \\ &\iff f(x) = m \end{aligned}$$

On considère l'équation $(E) : f(x) = m$.

- ■ Si $m \in \left]-\infty, -3\right[$ *alors l'équation* (E) *admet* 3 *distinctes solutions.*
- ■ Si $m = -3$ *alors l'équation admet* 2 *distinctes solutions.*
- ■ *Si* $m \in \left]-3, \frac{3}{2}\right[$ *alors l'équation admet unique solution.*
- ■ *Si* $m = \frac{3}{2}$ *alors l'équation admet* 2 *distinctes solutions*
- ■ *Si* $m \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ *l'équation admet* 3 *distinctes solutions.*

6. *On construit la courbe de la fonction* $h : x \longmapsto |f(x)|$.

- ■ *Si* $x \in \left[-\sqrt[3]{9}, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, *alors* $h(x) = f(x)$. *Ceci signifie que les courbes* (C_f) *et* (C_h) *sont confondues sur les intervalles* $\left[-\sqrt[3]{9}, -1\right[$ *et* $\left]1, +\infty\right[$
- ■ *Si* $x \in \left]-\infty, -\sqrt[3]{9}\right] \cup \left]-1, 1\right[$, *alors* $h(x) = -f(x)$. *Ceci signifie que les courbes* (C_f) *et* (C_h) *sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses sur les intervalles* $\left]-\infty, -\sqrt[3]{9}\right]$ *et* $\left]-1, 1\right[$.



Exercice 3 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Problème 4 *1. On a $D_f = \mathbb{R}^*$. Limites aux bornes de D_f.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = +\infty \\
\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -\infty \\
\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x}\left(x^2 - x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \\
\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x}\left(x^2 - x - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty
\end{aligned}$$

2. Les branches infinies de la courbe (C_f).

On a : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Calculons : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1
\end{aligned}$$

Calculons : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-x &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-x\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} -1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=-1\end{aligned}$$

et : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x}=1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-x=-1$. *Donc*

La courbe (C_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y=x-1$ *au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

3. *On étudie le signe de :* $f(x)-(x-1)$

   Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}f(x)-(x-1) &= x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-x+1\\ &= -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{-x+1}{x^2}\end{aligned}$$

On a $x^2\succ 0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$. *Le signe de* $f(x)-(x-1)$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *est celui de* $-x+1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-(-x+1)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

- Si $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,1[$, *alors* $f(x)-(-x+1)\succ 0$. *Ceci signifie que la courbe* (C_f) *est au dessus de l'asympotote.*
- Si $x\in\,]1,+\infty[$, *alors* $f(x)-(-x+1)<0$. *Ceci signifie que la courbe* (C_f) *est au dessous de l'asympotote.*
- *La courbe et l'asymptote se coipent au point d'abscisse* 1.

4. **a)** *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$.

   Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'\\ &= 1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\\ &= \frac{x^3+x-2}{x^3}\\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}\end{aligned}$$

b) *Les variations de la fonction f.*

On a

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$$

- $(x-1)(x^2+x+2) = 0 \iff x = 1$ *ou* $x^2+x+2 = 0$.
  Le discriminant Δ de l'équation $x^2+x+2=0$ est : -7. Ceci signifie que l'équation n'admet aucune solution réelle. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ x^2+x+2 \succ 0$$

- $x^3 = 0 \iff x = 0$.
  Donc

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. *La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)' \\ &= \frac{-2}{x^3} + \frac{6}{x^4} \\ &= \frac{-2x+6}{x^4} \end{aligned}$$

On a $x^4 \succ 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ est celui de $-2x+6$.

Donc

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$		$-$	
$convexite-de(C)$		$(C)convexe$	||	$(C)convexe$		$(C)concave$	

La fonction f'' s'annule en 3 et change de signe alors $I\left(3, \frac{16}{9}\right)$ est un point d'inflexion.

6. *Soit $x \in \mathbb{R}^*$.*

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=f(x)$$

On résout l'équation $f(x)=0$ *dans* $\mathbb{R}^*$.

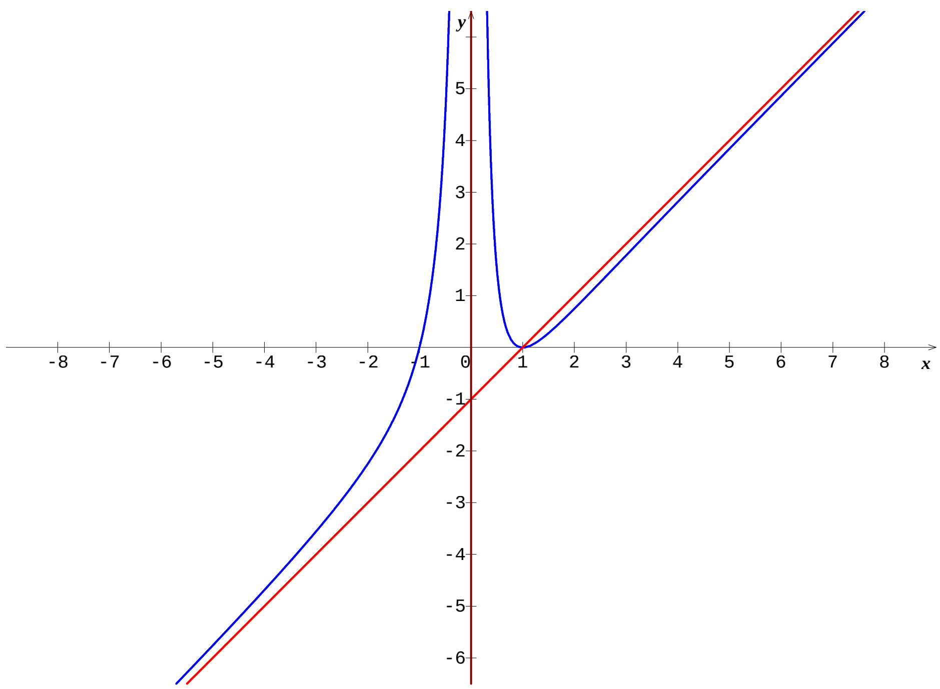
Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad 0 &\iff x-\frac{1}{x}=0 \quad ou \quad 1-\frac{1}{x}=0 \\ &\iff x=\frac{1}{x} \quad ou\ \frac{1}{x}=1 \\ &\iff x^2=1 \quad ou\ x=1 \\ &\iff x=1\ ou\ x=-1 \end{aligned}$$

Donc

$$(C_f)\cap(Ox)=\{(1,0);(-1,0)\}$$

7. *La courbe de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.



8. *D'après la courbe* (C_f) *on en déduit le tableau de signe suivant :*

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

9. *Soit* g *la fonction numérique définie par :*

$$g(x)=\left|x-\frac{1}{x}\right|.\left|1-\frac{1}{x}\right|$$

a) ■ *On a* $D_g = \mathbb{R}^*$.

$$g(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right| . \left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \left| \left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right| = |f(x)| .$$

Étudions la dérivablité de g *en* 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{g(x)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{|f(x)|}{x - 1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2 (x - 1)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)}{x^2} = 0 = g'(1) .
\end{aligned}$$

La fonction g *est dérivable en* 1. *La courbe* (C_g) *admet une tangente horizontale en point* $A(1,0)$, *d'équation* : $y = 0$.

■ *Étudions la dérivablité de* g *à droite de* -1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{g(x)}{x + 1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{|f(x)|}{x + 1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x + 1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2 (x + 1)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{x^2 (x + 1)} = 4 = g'_d(-1)
\end{aligned}$$

La fonction g *est dérivable à droite de* -1. *La courbe* (C_g) *admet une demi-tangente à droite en point d'abscisse* -1, *d'équation*

$$(\Gamma_d) : \begin{cases} y = 4x + 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

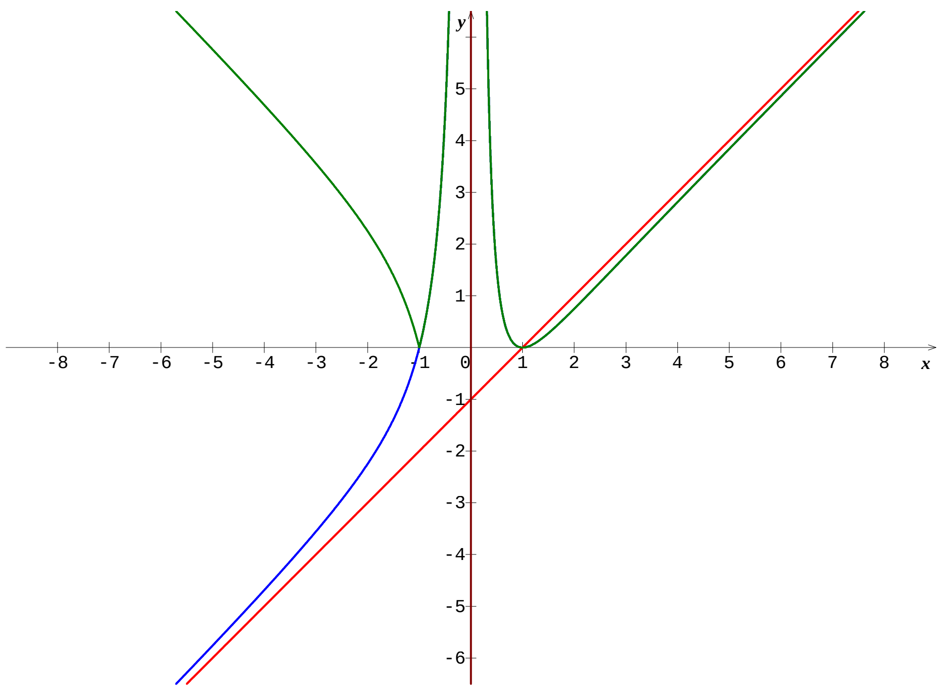
■ *Étudions la dérivablité de g à gauche de -1.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1} &= \lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{g(x)}{x+1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{|f(x)|}{x+1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} -\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x+1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} -\frac{\left(x^2-1\right)(x-1)}{x^2(x+1)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} -\frac{(x+1)(x-1)(x-1)}{x^2(x+1)} = -4 = g'_g(-1)
\end{aligned}$$

La fonction g est dérivable à gauche de -1, et comme $g'_d(-1) = 4 \neq g'_g(-1)$.
Ceci signifie que la fonction g n'est pas dérivable en -1.
La courbe (C_g) admet une demi-tangente à gauche en point d'abscisse -1, d'équation

$$(\Gamma_g) : \begin{cases} y = -4x - 4 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

b) *On construit la courbe (C_g).*
On suit la même démarche de l'exercice précédent on obtient la courbe suivante :



FIN

www.etude − generale.com