

Correction de la série N1

Exercice 1 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

1. a) Montrons que : $D_f = \mathbb{R}^*$.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sin x + 1 + x^2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x^2 + 1} - 1 \neq 0 \text{ et } x^2 + 1 \geq 0 \right\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |\sin x| &\leq 1 \\ \iff -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ \iff 0 &\leq \sin x + 1 \leq 2 \\ \iff x^2 &\leq \sin x + 1 + x^2 \leq 2 + x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \sin x + 1 + x^2 \geq 0 \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}), x^2 + 1 \geq 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0 &\iff \sqrt{x^2 + 1} = 1 \\ \iff x^2 + 1 &= 1 \\ \iff x^2 &= 0 \\ \iff x &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \\ &= \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

b) Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

■ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin x + x^2)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{\sin x + 1 + x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} + x\right)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{\sin x + 1 + x^2} + 1)} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) :$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x + x^2)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{\sin x + 1 + x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} + x\right)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{\sin x + 1 + x^2} + 1)} = +\infty \\ \text{car} \quad &: \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. a) Montrons que : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} |\sin x| &\leq 1 \\ \iff \frac{|\sin x|}{|x|} &\leq \frac{1}{|x|} \\ \iff \left| \frac{\sin x}{x} \right| &\leq \frac{1}{|x|} \\ \iff \frac{-1}{|x|} &\leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

comme : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -\frac{1}{|x|} = 0$. Donc, d'après limites et encadrement on en déduit :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 1} - \frac{1}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 1} + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

3. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} x.f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} x.f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{\sin x}{x} + x \right) (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 (\sqrt{\sin x + 1 + x^2} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x} + x \right) (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{\sin x + 1 + x^2} + 1)} = 1
\end{aligned}$$

4. On résout dans \mathbb{R}^* l'équation $f(x) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 \\
\iff & \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = 1 \\
\iff & \sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1 = \sqrt{x^2 + 1} - 1 \\
\iff & \sqrt{\sin x + 1 + x^2} = \sqrt{x^2 + 1} \\
\iff & \sin x + 1 + x^2 = x^2 + 1 \\
\iff & \sin x = 0 \\
\iff & x = k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}^*\}$$

5. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), \frac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
 |\sin x| &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow -1 &\leq \sin x \leq 1 \\
 \Leftrightarrow x^2 &\leq \sin x + 1 + x^2 \leq x^2 + 2 \\
 \Leftrightarrow |x| &\leq \sqrt{\sin x + 1 + x^2} \leq \sqrt{x^2 + 2} \\
 \Leftrightarrow |x| - 1 &\leq \sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1 \leq \sqrt{x^2 + 2} - 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{|x| - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} &\leq \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \leq \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \\
 \Leftrightarrow \frac{|x| - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} &\leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \frac{|x| - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

Exercice 2 .

- On considère la fonction numérique g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x - 18).$$

- Les variations de la fonction g .

g est une fonction polynôme dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{1}{4}(3x^2 - 3) \\
 &= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad g'(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} = 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow x &= 1 \text{ ou } x = -1
 \end{aligned}$$

D'où on conclut le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-4	-5	$+\infty$	

2. a) Montrons que la courbe (C_g) admet un unique point d'inflexion.
La fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

$$(\forall x \in \mathbb{R}), g''(x) = \frac{3}{2}x$$

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
Concavité de (C)	(C) concave		(C) convexe

Puisque la fonction g'' s'annule en 0 avec un changement de signe, alors le point $A(0, \frac{-9}{2})$ est un point d'inflexion de la courbe (C_g) .

- b) L'équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) au point A .

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

D'où

$$(T) : y = \frac{-3}{4}x - \frac{9}{2}.$$

3. Les branches infinies de la courbe (C_g) .

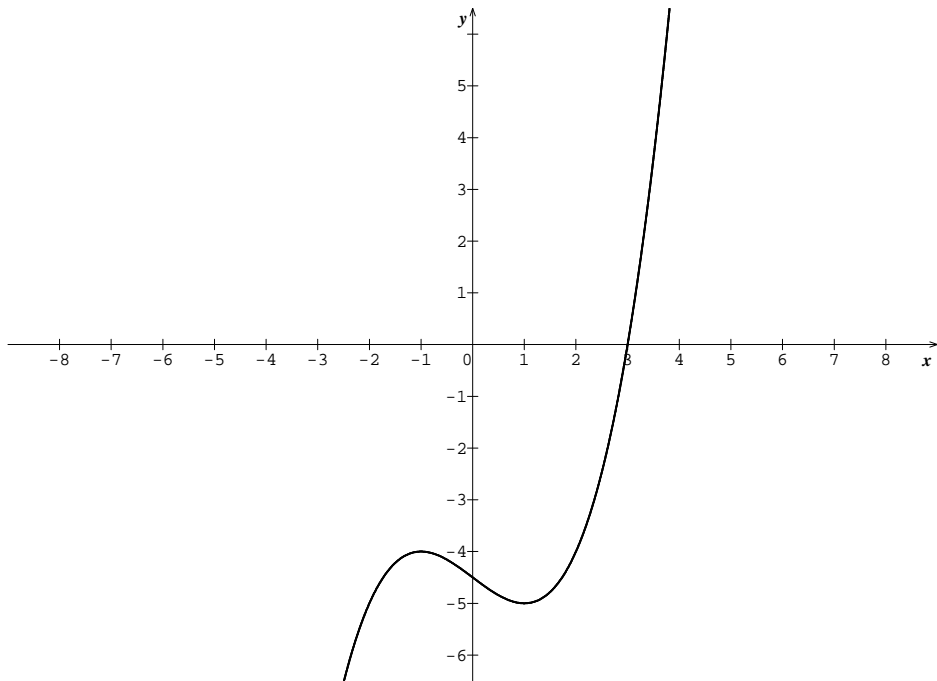
On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}(x^3 - 3x - 18)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 - 3x - 18)}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty \end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.

La courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4. La courbe (C_g) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



• On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right)$$

1. a) L'ensemble de définition de la fonction f .

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 1 = 0$ dans \mathbb{R} sont : -1 et 1 .

Donc

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

b) Les limites de f aux bornes de D .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = -\infty$$

2. a) Montrons que : $(\forall x \in D), f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

La fonction f est dérivable sur D .

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{(x^3+9)'(x^2-1) - (x^3+9)(x^2-1)'}{x^2-1} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3+9)}{(x^2-1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4 - 18x}{(x^2-1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{x^4 - 3x^2 - 18x}{(x^2-1)^2} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{x(x^3 - 3x - 18)}{4(x^2-1)^2} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \times \left(\frac{x\left(\frac{1}{4} \times (x^3 - 3x - 18)\right)}{(x^2-1)^2} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}
 \end{aligned}$$

b) Comme $(x^2-1)^2 \succ 0$ pour tout $x \in D$. Le signe de $f'(x)$ sur D est celui de $xg(x)$.

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
 xg(x) &= 0 \iff x = 0 \text{ ou } g(x) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } x^3 - 3x - 18 = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } (x-3)(3x+x^2+6) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x^2 + 3x + 6 = 0
 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation $x^2 + 3x + 6 = 0$ est : -15 . Ceci signifie que l'équation n'admet aucune solution réelle.

D'où

$$(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 + 3x + 6 \succ 0.$$

Donc

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f	$-\infty$	$+\infty$	-3	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3. a) Les branches infinies de la courbe (C_f) .

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{x^3+9}{x^2-1} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+9}{3x^3-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{3}x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3+9}{x^2-1} \right) - \frac{1}{3}x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3+9}{x^2-1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{x^3+9-x^3+x}{x^2-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{9+x}{x^2-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = 0$.

La courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

b) On étudie la position relative de la courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ) .

On étudie le signe de : $f(x) - \frac{1}{3}x$.

Soit $x \in D$.

$$f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \left(\frac{9+x}{x^2-1} \right)$$

■ $x+9=0 \iff x=-9$.

■ $x^2-1=0 \iff x=-1$ ou $x=1$.

Donc

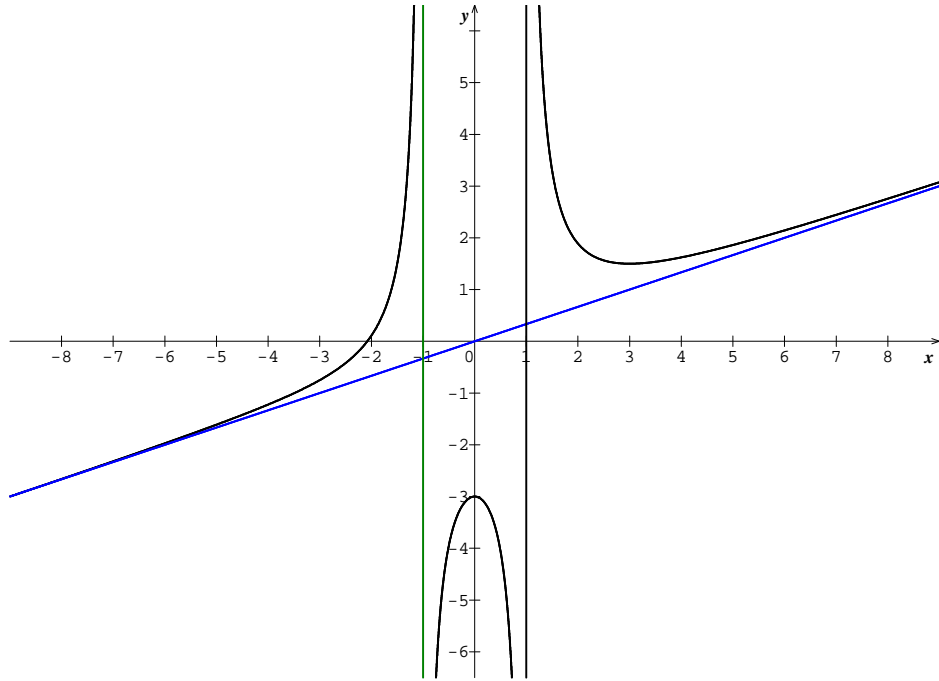
x	$-\infty$	-9	-1	1	$+\infty$	
$9+x$	-	0	+	+	+	
x^2-1	+	+	0	-	0	+
$f(x)-\frac{1}{3}x$	-	0	+	-	+	

■ Si $x \in]-\infty, -9[\cup]-1, 1[$ alors : $f(x) - \frac{1}{3}x < 0$. Ceci signifie que (C_f) est au dessous de la droite (Δ) .

■ Si $x \in]-9, -1[\cup]1, +\infty[$ alors : $f(x) - \frac{1}{3}x > 0$. Ceci signifie que (C_f) est au dessus de la droite (Δ) .

■ La courbe (C_f) et (Δ) se coupent en point d'abscisse -9 .

4. La courbe (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



5. Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
 x^3 - 3mx^2 + 3m + 9 &= 0 \iff x^3 + 9 = 3mx^2 - 3m \\
 &\iff x^3 + 9 = 3m(x^2 - 1) \\
 &\iff \frac{1}{3} \left(\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1} \right) = m \\
 &\iff f(x) = m
 \end{aligned}$$

On considère l'équation $(E) : f(x) = m$.

■ Si $m \in]-\infty, -3[$ alors l'équation (E) admet 3 distinctes solutions.

■ Si $m = -3$ alors l'équation admet 2 distinctes solutions.

■ Si $m \in]-3, \frac{3}{2}[$ alors l'équation admet unique solution.

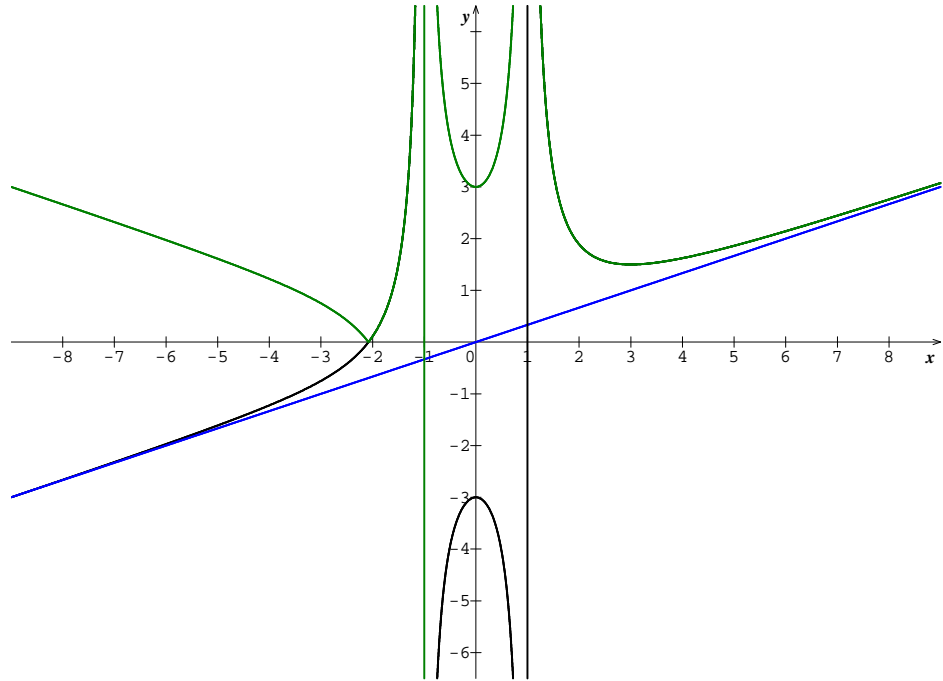
■ Si $m = \frac{3}{2}$ alors l'équation admet 2 distinctes solutions

■ Si $m \in]\frac{3}{2}, +\infty[$ l'équation admet 3 distinctes solutions.

6. On construit la courbe de la fonction $h : x \mapsto |f(x)|$.

■ Si $x \in [-\sqrt[3]{9}, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $h(x) = f(x)$. Ceci signifie que les courbes (C_f) et (C_h) sont confondues sur les intervalles $[-\sqrt[3]{9}, -1[$ et $]1, +\infty[$

■ Si $x \in]-\infty, -\sqrt[3]{9}] \cup]-1, 1[$, alors $h(x) = -f(x)$. Ceci signifie que les courbes (C_f) et (C_h) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses sur les intervalles $] -\infty, -\sqrt[3]{9}]$ et $] -1, 1[$.



Exercice 3 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Problème 4 1. On a $D_f = \mathbb{R}^*$. Limites aux bornes de D_f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(x^2 - x - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(x^2 - x - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

2. Les branches infinies de la courbe (C_f) .

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1 \end{aligned}$$

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

et : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -1$. Donc

La courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

3. On étudie le signe de : $f(x) - (x - 1)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(x) - (x - 1) &= x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - x + 1 \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{-x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

On a $x^2 \succ 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Le signe de $f(x) - (x - 1)$ sur \mathbb{R}^* est celui de $-x + 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - (-x + 1)$	$+$	$+$	0	$-$

■ Si $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, alors $f(x) - (-x + 1) \succ 0$. Ceci signifie que la courbe (C_f) est au dessus de l'asymptote.

■ Si $x \in]1, +\infty[$, alors $f(x) - (-x + 1) < 0$. Ceci signifie que la courbe (C_f) est au dessous de l'asymptote.

■ La courbe et l'asymptote se coipent au point d'abscisse 1.

4. a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)' \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{x^3 + x - 2}{x^3} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

b) Les variations de la fonction f .

On a

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$$

■ $(x-1)(x^2+x+2) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x^2+x+2 = 0.$

Le discriminant Δ de l'équation $x^2+x+2 = 0$ est : -7 . Ceci signifie que l'équation n'admet aucune solution réelle. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x^2+x+2 > 0$$

■ $x^3 = 0 \iff x = 0.$

Donc

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^3	-	0	+	+
$(x-1)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+
f	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

5. La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* .

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)' \\ &= \frac{-2}{x^3} + \frac{6}{x^4} \\ &= \frac{-2x + 6}{x^4} \end{aligned}$$

On a $x^4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le signe de $f''(x)$ sur \mathbb{R}^* est celui de $-2x + 6$.

Donc

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+	-
convexité-de(C)	(C)convexe	(C)convexe	(C)concave	

La fonction f'' s'annule en 3 et change de signe alors $I\left(3, \frac{16}{9}\right)$ est un point d'inflexion.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = f(x)$$

On résout l'équation $f(x) = 0$ dans \mathbb{R}^* .

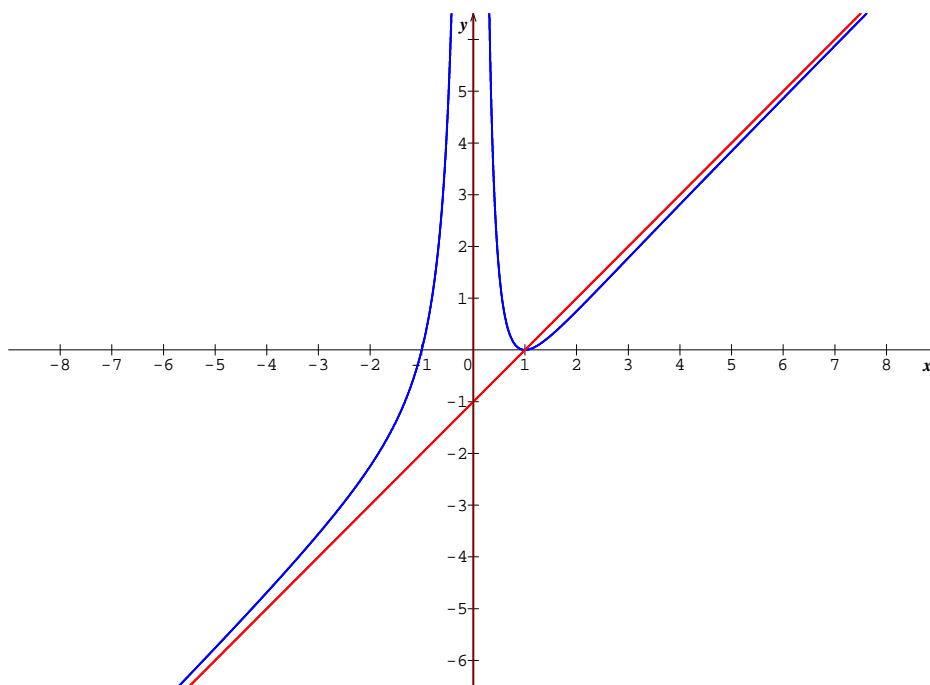
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x - \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{x} \text{ ou } \frac{1}{x} = 1 \\ &\iff x^2 = 1 \text{ ou } x = 1 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Donc

$$(C_f) \cap (Ox) = \{(1, 0); (-1, 0)\}$$

7. La courbe de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



8. D'après la courbe (C_f) on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$

9. Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| \cdot \left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

a) ■ On a $D_g = \mathbb{R}^*$.

$$g(x) = \left| x - \frac{1}{x} \right| \cdot \left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \left| \left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right| = |f(x)|.$$

Étudions la dérivabilité de g en 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)}{x^2} = 0 = g'(1). \end{aligned}$$

La fonction g est dérivable en 1. La courbe (C_g) admet une tangente horizontale en point $A(1, 0)$, d'équation : $y = 0$.

■ Étudions la dérivabilité de g à droite de -1 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|f(x)|}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{x^2(x + 1)} = 4 = g'_d(-1) \end{aligned}$$

La fonction g est dérivable à droite de -1 . La courbe (C_g) admet une demi-tangente à droite en point d'abscisse -1 , d'équation

$$(\Gamma_d) : \begin{cases} y = 4x + 4 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

■ Étudions la dérivabilité de g à gauche de -1 .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|f(x)|}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} - \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} - \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{x^2(x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} - \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 1)}{x^2(x + 1)} = -4 = g'_g(-1)
 \end{aligned}$$

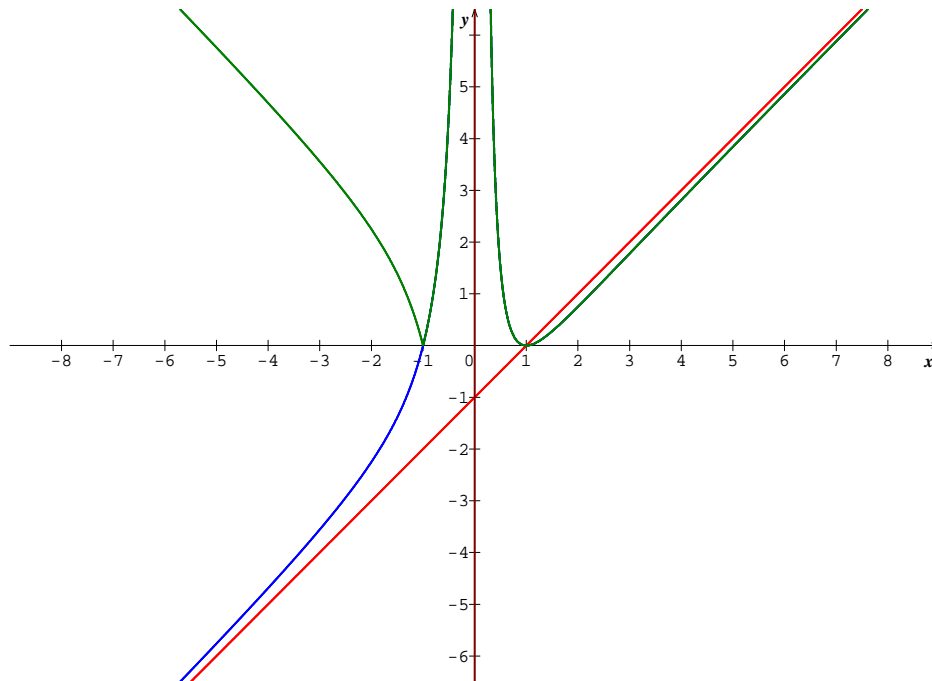
La fonction g est dérivable à gauche de -1 , et comme $g'_d(-1) = 4 \neq g'_g(-1)$. Ceci signifie que la fonction g n'est pas dérivable en -1 .

La courbe (C_g) admet une demi-tangente à gauche en point d'abscisse -1 , d'équation

$$(\Gamma_g) : \begin{cases} y = -4x - 4 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

b) On construit la courbe (C_g) .

On suit la même démarche de l'exercice précédent on obtient la courbe suivante :



FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**