Correction de la série d'exercices

Exercice 1 .

■

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k-5^{2k}}{\pi^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{\pi^{k+1}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{5^{2k}}{\pi^{k+1}} \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(5^2)^k}{\pi^k} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5^2}{\pi}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^0\times\frac{1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{\pi}}-\left(\frac{5^2}{\pi}\right)^0\times\frac{1-\left(\frac{5^2}{\pi}\right)^{n+1}}{1-\frac{5^2}{\pi}}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\left(1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}\right)}{\pi-3}-\frac{\pi\left(1-\left(\frac{5^2}{\pi}\right)^{n+1}\right)}{\pi-5^2}\right) \\
&= \frac{1-\left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}}{\pi-3}-\frac{1-\left(\frac{5^2}{\pi}\right)^{n+1}}{\pi-5^2}
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}2^k.\pi^{3-k} &= \prod_{k=1}^{n}\pi^3 2^k\times\frac{1}{\pi^k} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\pi^3\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \\
&= \left(\pi^3\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \\
&= \pi^{3n}\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\times\ldots\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right) \\
&= \pi^{3n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1+2+\ldots+n} \\
&= \pi^{3n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

1. *On a :* $u_1 = \frac{5u_0+4}{u_0+2} = \frac{0+4}{0+2} = 2$ *et* $u_2 = \frac{5u_1+4}{u_1+2} = \frac{5\times2+4}{2+2} = \frac{7}{2}$.

2. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \leq u_n < 4$.

   - *Pour* $n = 0$, *on a :* $u_0 = 0$ *donc :* $0 \leq u_0 < 4$. *L'encadrement est vrai.*
   - *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que :* $0 \leq u_n < 4$ *et on montre que :* $0 \leq u_{n+1} < 4$.
     Comme $0 \leq u_n < 4$, *alors :* $\frac{5u_n+4}{u_n+2} \geq 0$, *c'est-à-dire :* $u_{n+1} \geq 0$. (1)
     D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 4 &= \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4 \\ &= \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n - 4}{u_n + 2} \end{aligned}$$

     Comme $0 \leq u_n < 4$, *alors :* $\frac{u_n-4}{u_n+2} < 0$, *c'est-à-dire :* $u_{n+1} < 4$. (2)
     D'après (1) *et* (2), *on conclut que :* $0 \leq u_{n+1} < 4$.
   - *D'après le principe de récurrence, on en déduit que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, 0 \leq u_n < 4$$

3. *Le sens de variations de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{5u_n + 4 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{u_n + 2} \\ &= \frac{-\left(u_n + 1\right)\left(u_n - 4\right)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

   Comme $0 \leq u_n < 4$ *alors* $\frac{-(u_n+1)(u_n-4)}{u_n+2} \succ 0$, *donc* $u_{n+1} - u_n \succ 0$. *Ceci signifie que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

4. *On considère la suite numérique* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $v_n = \frac{u_n-4}{u_n+1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

a) *Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}+1} \\ &= \frac{\frac{5u_n+4}{u_n+2}-4}{\frac{5u_n+4}{u_n+2}+1} \\ &= \frac{\frac{5u_n+4-4u_n-8}{u_n+2}}{\frac{5u_n+4+u_n+2}{u_n+2}} \\ &= \frac{5u_n+4-4u_n-8}{5u_n+4+u_n+2} \\ &= \frac{u_n-4}{6\left(u_n+1\right)} \\ &= \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$$

Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-4}{u_0+1} = -4$.

b) *On sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = -4$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$v_n = v_0 \times q^n$$

d'où

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), v_n = \frac{-4}{6^n}$$

■ *L'expression de u_n en fonction de n.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n-4}{u_n+1} \iff v_n\left(u_n+1\right) = u_n-4, \quad \left(u_n+1 \neq 0\right) \\ &\iff v_nu_n+v_n = u_n-4 \\ &\iff u_n\left(v_n-1\right) = -v_n-4 \\ &\iff u_n = \frac{v_n+4}{1-v_n} \\ &\iff u_n = \frac{\left(\frac{-4}{6^n}\right)+4}{1-\left(\frac{-4}{6^n}\right)} = \frac{\frac{-4+6^n\times 4}{6^n}}{\frac{6^n+4}{6^n}} = \frac{4\left(-1+6^n\right)}{6^n+4} \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), u_n = \frac{4\left(6^n-1\right)}{6^n+4}$$

5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{4\left(6^k-1\right)}{6^k+4}+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{4\left(6^k-1\right)+6^k+4}{6^k+4}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{6^k+4}{4\left(6^k-1\right)+6^k+4} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{6^k+4}{5\times 6^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5}+\frac{4}{5\times 6^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5}+\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{5\times 6^k} \\
&= \frac{1}{5}(n+1)+\frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\
&= \frac{1}{5}(n+1)+\frac{4}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{1}{5}(n+1)+\frac{24}{25}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = \frac{1}{5}(n+1)+\frac{24}{25}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)
$$

Exercice 3 *On considère les suites numériques* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$
u_0 = 2, u_1 = \frac{4}{9} \quad et \quad u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1}-u_n\right) \qquad et \quad v_n = u_n - \frac{1}{3^n}
$$

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$.

■ *Pour* $n=0$, *on a :* $u_1 = \frac{4}{9}$ *et* $\frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}+\frac{2}{9} = \frac{4}{9}$, *donc :* $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^2}$ *l'égalité est vraie.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que :* $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ *et on montre que :* $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - u_n\right) \\
&= \frac{1}{27}\left(12\left(\frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}\right) - u_n\right) \\
&= \frac{1}{27}\left(\frac{12}{9}u_n + \frac{24}{3^{n+2}} - u_n\right) \\
&= \frac{1}{27}\left(\frac{3}{9}u_n + \frac{24}{3^{n+2}}\right) \\
&= \frac{1}{81}u_n + \frac{8}{3^{n+4}} \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}\right) + \frac{6}{3^{n+4}} \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}\right) + \frac{2}{3^{n+3}} \\
&= \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}
\end{aligned}$$

■ *D'après le principe de récurrence on en déduit que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

2. *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}} \\
&= \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{1}{9}v_n
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$$

Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique sa raison* $\frac{1}{9}$ *et le premier terme* $v_0 = 1$.

■ *L'expression de* u_n *en fonction de* n.

On sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

d'où

$$(\forall n\in\mathbb{N}), v_n = \frac{1}{9^n}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \iff u_n = v_n + \frac{1}{3^n} \iff u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}.$$

Donc

$$(\forall n\in\mathbb{N}), u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}$$

3. *Soit $n\in\mathbb{N}$.*

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{9^k} + \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{9^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{8}\times\frac{1}{9^{n+1}} - \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{n+1}} \\
&= \frac{21}{8} - \frac{1}{8\times 9^n} - \frac{1}{2\times 3^n} \\
&= \frac{1}{8}\left(21-\frac{1}{9^n}\right) - \frac{1}{2\times 3^n}
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n\in\mathbb{N}), S_n = \frac{1}{8}\left(21-\frac{1}{9^n}\right) - \frac{1}{2\times 3^n}$$

Exercice 4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \quad (\forall n\in\mathbb{N}), \quad u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \end{cases}$$

1. *On a : $u_1 = 2+1 = 3$ et $u_2 = 2u_1 + 1 + 1 = 6 + 1 + 1 = 8$.*

2. *Montrons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)$.

■ *Pour* $n = 1$, *on a :* $u_1 = 3$ *et* $2^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k}\right) = 3$, *donc :* $u_1 = 2^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k}\right)$ *l'égalité est vraie.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que* $u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)$ *et on montre que :* $u_{n+1} = 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k}\right)$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2u_n + n + 1 \\
&= 2 \times 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + n + 1 \\
&= 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + n + 1 \\
&= 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

■ *Donc d'après le principe de récurrence on en déduit que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)$$

3. *Montrons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

■ *Pour* $n = 1$, *on a :* $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}$ *et* $2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$, *donc l'égalité est vraie.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ *et on montre que :* $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{1}{2^n}\left(-(n+2) + \frac{n+1}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2^n}\left(\frac{-2n-4+n+1}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2^n} \times \frac{-n-3}{2} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

■ *Donc d'après le principe de récurrence on en déduit que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

4. *On déduit que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_n &= 2^n\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) \quad \textit{(question 2/)} \\
&= 2^n\left(1 + 2 - \frac{n+2}{2^n}\right) \quad \textit{(question 3/)} \\
&= 2^n + 2^{n+1} - (n+2) \\
&= 2^n(1+2) - (n+2) \\
&= 2^n \times 3 - (n+2)
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$ *on a :* $2^0 \times 3 - (0+2) = 1$ *et comme* $u_0 = 1$. *Alors :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 \times 2^n - n - 2$$

Exercice 5 *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1. *On a :* $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1$ *et* $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. *La monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $,\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \succ 0$ *donc* $u_{n+1}-u_n \succ 0$. *D'où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante.*

3. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p-1}}-\frac{1}{\sqrt{p}} \quad \geq \quad \frac{1}{2p\sqrt{p}} &\iff \frac{1}{\sqrt{p-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{2p\sqrt{p}} \\ &\iff \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} \geq 1+\frac{1}{2p} \\ &\iff \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} \geq \frac{(2p+1)}{2p} \\ &\iff 2p\sqrt{p} \geq \sqrt{p-1}\times(2p+1) \\ &\iff 4p^3 \geq \left(4p^2+4p+1\right)(p-1) \\ &\iff 4p^3 \geq 4p^3-4p^2+4p^2-4p+p-1 \\ &\iff 0 \geq -3p-1 \\ &\iff -3p-1 \leq 0 \end{aligned}$$

   Comme : $-3p-1 \leq 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, *alors*

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}),\ \frac{1}{\sqrt{p-1}}-\frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

   On a

$$\forall k \in \{2,...,n\},\quad \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

   donc

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{k-1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}\right)$$

   comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{k-1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{1}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)+...+\left(\frac{2}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 2-\frac{2}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ensuite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} - 1 \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

et comme : $3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 3 - \frac{2}{n}$ *alors*

$$u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

pour $n = 1$, *on a* : $3 - \frac{2}{1} = 1$ *et* $u_1 = 1$ *donc* $u_1 \leq 1$. *D'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 3 - \frac{2}{n} \quad (1)$$

D'autre pat, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_1 \leq u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \qquad (2)$$

D'après (1) *et* (2) *on conclut que* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com