Correction de la série

Exercice 1 *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x$$

1. *Montrons que 2π est une période de f :*

   ■
   $$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x + 2\pi \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

   ■ *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
   $$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\sin(2(x+2\pi)) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x+4\pi) - \cos(x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x) = f(x) \qquad (2) \end{aligned}$$

   D'après (1) et (2) on en déduit que la fonction f est périodique.

2. *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions dérivables : $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$ et $x \longmapsto -\cos x$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \sin x \\ &= \cos(2x) + \sin x \\ &= -2\sin^2 x + \sin x + 1 \\ &= -(2\sin x + 1)(\sin x - 1) \\ &= 2(1-\sin x)\left(\frac{1}{2} + \sin x\right) \end{aligned}$$

   Donc
   $$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = 2(1-\sin x)\left(\frac{1}{2} + \sin x\right).$$

3. *Les variations de f sur $[-\pi, \pi]$:*

Soit $x \in [-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \iff 2(1-\sin x)\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)=0 \\ &\iff \sin x = 1 \quad ou \quad \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &\iff x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z} \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} x = \frac{-\pi}{6}+2k\pi \\ ou \\ x = \frac{7\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

comme $x \in [-\pi, \pi]$ *alors* $x \in \left\{\frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$. *Donc d'après le cercle trigonométrique on en déduit le tableau suivant :*

x	$-\pi$		$\frac{-5\pi}{6}$		$\frac{-\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

4. *On résout dans* $\left[\frac{-5\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right]$ *l'inéquation :* $f(x) \leq 0$.
   On résout l'équation $f(x) = 0$ *dans* $\left[\frac{-5\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right]$.
   Soit $x \in \left[\frac{-5\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \iff \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x = 0 \\ &\iff \sin x . \cos x - \cos x = 0 \\ &\iff \cos x(\sin x - 1) = 0 \\ &\iff \cos x = 0 \quad ou \quad \sin x = 1 \\ &\iff x = \frac{\pi}{2}+k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z} \quad ou \quad x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On cherche parmi ces solutions ceux qui appartiennent à $\left[\frac{-5\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

■

$$\begin{aligned} \frac{-5\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{2}+k\pi \leq \frac{7\pi}{3} \\ &\iff \frac{-5}{2} \leq \frac{1}{2}+k \leq \frac{7}{3} \\ &\iff \frac{-5}{2}-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{3}-\frac{1}{2} \\ &\iff -3 \leq k \leq \frac{11}{6} \end{aligned}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors :* $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. *Donc*

- *Si* $k=-3$, *alors* $x=-\frac{5\pi}{2}$.
- *Si* $k=-2$, *alors* $x=-\frac{3\pi}{2}$.
- *Si* $k=-1$, *alors* $x=-\frac{\pi}{2}$.
- *Si* $k=0$, *alors* $x=\frac{\pi}{2}$.
- *Si* $k=1$, *alors* $x=\frac{3\pi}{2}$.

■

$$\begin{aligned} \frac{-5\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \leq \frac{7\pi}{3} \\ &\Longleftrightarrow \frac{-5}{2} \leq \frac{1}{2}+2k \leq \frac{7}{3} \\ &\Longleftrightarrow \frac{-5}{2}-\frac{1}{2} \leq 2k \leq \frac{7}{3}-\frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow -3 \leq 2k \leq \frac{11}{6} \\ &\Longleftrightarrow \frac{-3}{2} \leq k \leq \frac{11}{12} \end{aligned}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* : $k \in \{-1,0\}$. *Donc*

- *Si* $k=-1$ *alors* : $x=\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}$.
- *Si* $k=0$, *alors* : $x=\frac{\pi}{2}$.

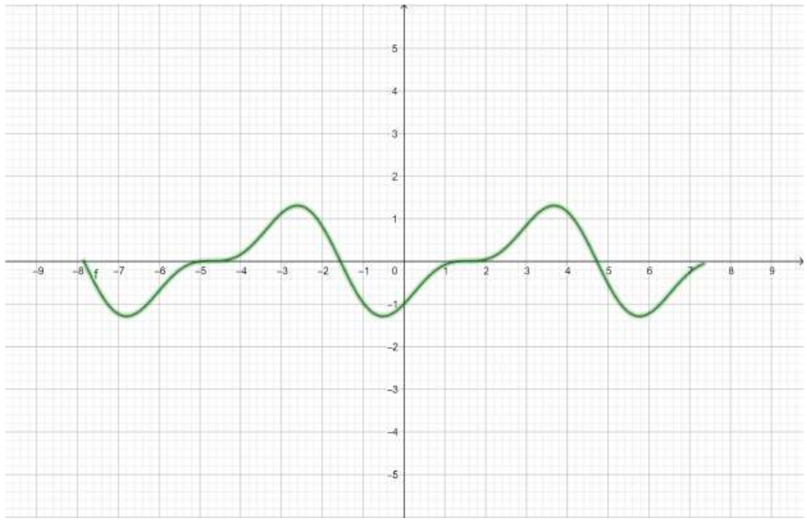
Donc les solutions de l'équation $f(x)=0$ *dans* $\left[\frac{-5\pi}{2},\frac{7\pi}{3}\right]$ *sont* : $\frac{-5\pi}{2},\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$
D'après le cercle trigonométrique on en déduit le tableau de signe suivant

x	$\frac{-5\pi}{2}$		$\frac{-3\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{3}$
$cosx$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$sinx-1$		−	0	−		−	0	−		−	
$f(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) \leq 0$ *est* :

$$S=\left[\frac{-5\pi}{2},\frac{-3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{3}\right]$$

5. *On construit d'abord la restriction de la courbe* (C_f) *sur* I *puis on complète la construction sur* J *en utilisant la périodicité de la fonction* f*.On obtient la courbe suivante :*



6. *Soit* $x \in J$.

$$\begin{aligned} m + \cos x\,(1 - \sin x) &= 0 \iff m + \cos x - \cos x . \sin x = 0 \\ &\iff m + \cos x - \frac{1}{2}\sin(2x) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x = m \\ &\iff f(x) = m \end{aligned}$$

Graphiquement on déduit les solutions de l'équation $(E) : f(x) = m$.

- Si $m \in \left]\frac{3\sqrt{3}}{4}, +\infty\right[$, *alors l'équation* (E) *n'admet aucune solution réel.*
- Si $m = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, *alors l'équation* (E) *admet deux solutions distinctes.*
- Si $m \in \left]0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right[$ *alors l'équation* (E) *admet* 4 *solutions distinctes.*
- Si $m = 0$ *alors l'équation* (E) *admet* 5 *solutions distinctes.*
- Si $m \in \left]\frac{-3\sqrt{3}}{4}, 0\right[$ *alors l'équation* (E) *admet* 6 *solutions distinctes.*
- Si $m = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$ *alors l'équation* (E) *admet* 3 *solutions distinctes.*
- Si $m \in \left]-\infty, \frac{-3\sqrt{3}}{4}\right[$ *alors l'équation* (E) *n'admet aucune solution réel.*

Exercice 2 *On considère* f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \sin^2 x - 2\cos x - 1$$

1. *Montrons que la fonction f est paire.*
   On a : $D_f = \mathbb{R}$.

   - $(\forall x \in D_f)\,, \quad -x \in D_f$.
   - *Soit* $x \in D_f$.

   $$f(-x) = \sin^2(-x) - 2\cos(-x) - 1 = \sin^2 x - 2\cos x - 1 = f(x)$$

   Donc la fonction f est paire.

   D'autre part, on a

   $$(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ x + 2\pi \in \mathbb{R}$$

   et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{array}{rcl} f(x+2\pi) & = & \sin^2(x+2\pi) - 2\cos(x+2\pi) - 1 \\ & = & \sin^2 x - 2\cos x - 1 \\ & = & f(x) \end{array}$$

   Ceci signifie que 2π est une période de la fonction f. Donc on peut restreindre l'etude de la fonction f sur $D_E = [0,\pi] \cap D_f = [0,\pi]$.

2. *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout sur* $I = [0,\pi]$.
   Soit $x \in I$.

   $$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2\cos x \sin x + 2\sin x \\ & = & 2\sin x.(\cos x + 1) \end{array}$$

   Donc

   $$(\forall x \in I)\,, \quad f'(x) = 2\sin x.(\cos x + 1)$$

   Soit $x \in I$.

   $$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 0 \iff 2\sin x.(\cos x + 1) = 0 \\ & \iff & \sin x = 0 \quad ou \quad \cos x = -1 \\ & \iff & x = k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z} \quad ou \quad x = \pi + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

   comme $x \in I$ alors les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ dans I sont : 0 et π.

x	0		π
$f'(x)$	0	$+$	0
f	-3	$\nearrow$	1

3. *La concavité de la courbe* (C_f) *sur* I.

La fonction f *est deux fois dérivables sur* I.

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2\cos x \sin x + 2\sin x)' \\ &= 2(-\sin x.\sin x + \cos x.\cos x) + 2\cos x \\ &= -2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2\cos x \\ &= 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 \\ &= 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1) \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in I), \quad f''(x) = 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1).$$

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0 \\ &\iff \cos x = -1 \quad ou \quad \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos x = -1 \quad ou \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \\ &\iff x = \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \ ou \ \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

comme $x \in I$ *alors les solutions de l'équation* $f''(x) = 0$ *dans* I *sont :* 0 *et* $\frac{\pi}{3}$.

D'où on obtient :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$cosx{+}1$		$+$		$+$	0
$2cosx{-}1$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0
$concavite{-}de(C)$		$(C)convexe$		$(C)concave$	

Puisque la fonction f'' *s'annule en* $\frac{\pi}{3}$ *avec un changement de signe, alors le point* $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{-5}{4}\right)$ *est un point d'inflexion de la courbe* (C_f).

4. **a)** *On cherche les points d'intersetion de la courbe* (C_f) *avec l'axe des abscisses sur* I.

   On résout l'équation $f(x) = 0$ *dans* I.

Soit $x \in I$.

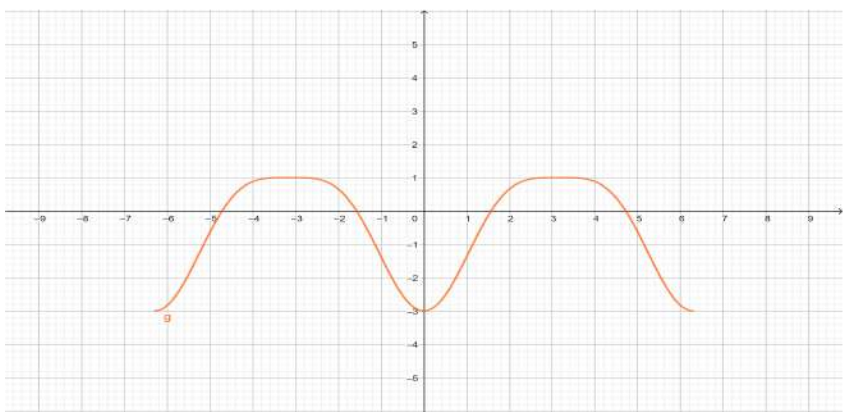
$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad 0 \iff \sin^2 x - 2\cos x - 1 &= 0 \\ \iff \quad \left(1 - \cos^2 x\right) - 2\cos x - 1 &= 0 \\ \iff \quad -\cos^2 x - 2\cos x &= 0 \\ \iff \quad -\cos x\left(\cos x + 2\right) &= 0 \\ \iff \quad \cos x = 0 \ \textit{ou} \ \underbrace{\cos x = -2}_{impossible} & \\ \iff \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ /k \in \mathbb{Z} & \end{aligned}$$

Comme $x \in I$ *alors la solution* $f''(x) = 0$ *est :* $\frac{\pi}{2}$. *Ceci signifie que :*

$$(C_f) \cap (Ox) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right\}$$

b) *On construit la courbe* (C_f) *sur* $[-2\pi, 2\pi]$ *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On construit d'abord la restriction de la courbe (C_f) *sur* I *puis on complète la construction sur* $[-\pi, \pi]$ *en utilisant la parité de* f*, puis on conclut par la périodicité la construction sur* $[-2\pi, 2\pi]$.



FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com