Correction du devoir surveillé

Exercice 1 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}$$

1. *On détermine D_f.*

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ x+7 \geq 0 \quad et \quad x+3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq -7 \ et \ x \geq -3\} \\ &= [-3, +\infty[. \end{aligned}$$

2. **a)** *Montrons que f est minorée par* 0. *C-à-d* : $(\forall x \in [-3, +\infty[) , \quad f(x) \geq 0$.

Soit $x \in [-3, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3} \\ &= \frac{(x+7)-(x+3)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+3}} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in [-3, +\infty[) , \quad f(x) \geq 0$$

Ceci signifie que la fonction f est minorée par 0.

b) *Résolvons l'équation $f(x) = 0$ dans* $[-3, +\infty[$.

Soit $x \in [-3, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \iff \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3} = 0 \\ &\iff \sqrt{x+7} = \sqrt{x+3} \\ &\iff x+7 = x+3 \\ &\iff 7 = 3 \ \ (\textit{Ce qui est impossible}) \end{aligned}$$

Alors l'équation n'admet aucune solution dans $[-3, +\infty[$. *C'est-à-dire*

$$(\forall x \in [-3, +\infty[) , \ f(x) \neq 0.$$

D'où 0 *n'est pas un minimum de* f.

3. **a)** *Montrons que f est majorée par 2. C-à-d :* $(\forall x \in [-3,+\infty[)\,,\ \ f(x) \leq 2.$

$$\begin{aligned}
f(x) - 2 &= \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3} - 2 \\
&= \sqrt{x+7} - 2 - \sqrt{x+3} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+7}+2\right)\left(\sqrt{x+7}-2\right)}{\left(\sqrt{x+7}+2\right)} - \sqrt{x+3} \\
&= \frac{x+7-4}{\sqrt{x+7}+2} - \sqrt{x+3} \\
&= \frac{x+3}{\sqrt{x+7}+2} - \sqrt{x+3} \\
&= \sqrt{x+3}\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+7}+2} - 1\right) \\
&= \sqrt{x+3}\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}-2}{\sqrt{x+7}+2}\right) \\
&= \sqrt{x+3}\left(\frac{-f(x)-2}{\sqrt{x+7}+2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [-3,+\infty[$, *alors* $-f(x) - 2 \leq 0$, *donc*

$$(\forall x \in [-3,+\infty[)\,,\ f(x) \leq 2$$

Ceci signifie que f est majorée par 2.

b) *Résolvons l'équation* $f(x) = 2$ *dans* $[-3,+\infty[$.
Soit $x \in [-3,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f(x) = 2 &\iff \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3} = 2 \\
&\iff \left(\sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}\right)^2 = 4 \\
&\iff x + 7 - 2\sqrt{(x+7)(x+3)} + x + 3 = 4 \\
&\iff -2\sqrt{(x+7)(x+3)} = -2x - 6 \\
&\iff \sqrt{(x+7)(x+3)} = x + 3 \\
&\iff (x+7)(x+3) = (x+3)^2 \\
&\iff (x+7)(x+3) - (x+3)^2 = 0 \\
&\iff (x+3)\left[(x+7) - (x+3)\right] = 0 \\
&\iff x + 3 = 0 \quad ou \quad \underbrace{4 = 0}_{impossible} \\
&\iff x = -3
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in [-3,+\infty[)\,,\ f(x) \leq f(-3)\,.$$

Ceci signifie que 2 est un maximum en point d'abscisse $x_0 = -3$.

4. Montrons que f est strictement décroissante sur $[-3,+\infty[$.

Soient x et y deux éléments de $[-3,+\infty[$ tels que : $x \neq y$. Calculons $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3}\right)-\left(\sqrt{y+7}-\sqrt{y+3}\right)}{x-y} \\
&= \frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{y+7}}{x-y}-\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{y+3}}{x-y}\right) \\
&= \frac{(x-y)}{(x-y)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}\right)}-\left(\frac{x-y}{(x-y)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}\right)-\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}\right)} \\
&= \frac{-\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3}\right)-\left(\sqrt{y+7}-\sqrt{y+3}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}\right)} \\
&= \frac{-f(x)-f(y)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}\right)}<0
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0 \quad , \text{ où } x,y \in [-3,+\infty[\text{ et } x \neq y.$$

Ceci signifie que la fonction f est strictement décroissante sur $[-3,+\infty[$.

Exercice 2 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

1. **a)** *Montrons que f est impaire.*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$.*
- *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$f(-x)=\frac{2\times(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}=-f(x)$$

Ceci siginifie que la fonction f est impaire.

b) ■ *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{2x}{x^2+1} - 1 \\ &= \frac{2x - (x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1} \\ &= \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-(x-1)^2}{x^2+1} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \; f(x) \leq 1$$

■ *Soit* $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} \\ &= \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+1}{x^2}} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} = f(x). \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), \; f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

2. f *n'est pas surjective car* 2 *n'a pas d'antécédent par* f. *D'autre part* $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ *mais* $2 \neq \frac{1}{2}$ *ce qui montre que* f *n'est pas injective.*

3. **a)** *Soient* a *et* b *deux éléments de* $\mathbb{R}^+$ *tels que :* $a \neq b$. *Calculons* $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a-b} &= \frac{\frac{2a}{a^2+1} - \frac{2b}{b^2+1}}{a-b} \\ &= \frac{2a(b^2+1) - 2b(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(a-b)} \\ &= \frac{2ab^2 + 2a - 2ba^2 - 2b}{(a^2+1)(b^2+1)(a-b)} \\ &= \frac{-2ab(a-b) + 2(a-b)}{(a^2+1)(b^2+1)(a-b)} \\ &= \frac{(a-b)(-2ab+2)}{(a^2+1)(b^2+1)(a-b)} \\ &= \frac{2(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)} \end{aligned}$$

Donc
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{2(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)} \quad , \text{ où } a,b\in\mathbb{R}^+ \text{ et } a\neq b.$$

b) *La monotonie de f sur $[1,+\infty[$ et $[0,1]$.*

- *Soient a et b deux éléments de $[1,+\infty[$ tels que : $a\neq b$.*
  On a $ab\geq 1$, et comme $a\neq b$ alors $ab\succ 1$, de plus $2(1-ab)<0$. Puisque $(a^2+1)(b^2+1)\succ 0$.Donc
  $$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<0 \quad , \text{ où } a,b\in[1,+\infty[\text{ et } a\neq b$$
  Ceci signifie que f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
- *Soient a et b deux éléments de $[0,1]$ tels que : $a\neq b$.*
  On a $0\leq a\leq 1$ et $0\leq b\leq 1$, et comme $a\neq b$ alors $0\leq ab<1$, de plus $0<2(1-ab)\leq 2$. Donc
  $$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\succ 0 \quad , \text{ où } a,b\in[0,1] \text{ et } a\neq b$$
  Ceci signifie que f est strictement croissante sur $[0,1]$.

4. **a)** *La fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ et puisque elle est impaire alors f est strictement croissante sur $[-1,0]$. D'autre part, f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et puisque elle est impaire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.*

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	

b) *Montrons que : $(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2),\ \ a+b\geq\sqrt{3}\implies\frac{(a+b)^2+1}{a+b}\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}$.*
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} a+b & \geq & \sqrt{3} \\ \underset{f \text{ est strict}\searrow \text{ sur } [1,+\infty[}{\Longrightarrow} f(a+b) & \leq & f\left(\sqrt{3}\right) \\ & \Longrightarrow & \dfrac{2(a+b)}{(a+b)^2+1}\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{4} \\ & \Longrightarrow & \dfrac{(a+b)^2+1}{2(a+b)}\geq\dfrac{4}{2\sqrt{3}} \\ & \Longrightarrow & \dfrac{(a+b)^2+1}{a+b}\geq\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ & \Longrightarrow & \dfrac{(a+b)^2+1}{a+b}\geq\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

Donc

$$\left(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\right),\ a+b\geq\sqrt{3}\implies\frac{(a+b)^2+1}{a+b}\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

5. *Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=[1,+\infty[$. On pose $J=]0,1]$.*
   Montrons que g est une bijection de I sur J.
   Soit $y\in]0,1]$. Résolvons dans I l'équation $g(x)=y$.
   Soit $x\in[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y\iff\frac{2x}{x^2+1}=y\\ &\iff 2x=yx^2+y\\ &\iff -yx^2+2x-y=0\end{aligned}$$

Calculons le discriminant Δ de l'équation $(E): -yx^2+2x-y=0$.

$$\Delta=4-4\times(-y)\times(-y)=4\left(1-y^2\right)\geq 0$$

L'équation (E) admet deux solutions distinctes ou confondues :

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\quad et\ \ x_2=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

On a exactement deux solutions cherchons celle qui est supérieure à 1.

■

$$x_1\geq 1$$

On a

$$\begin{aligned} &\iff \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\geq 1\\ &\iff 1-\sqrt{1-y^2}\geq y\\ &\iff 1\geq\sqrt{1-y^2}+y\\ &\iff 1\geq\left(1-y^2\right)+2y\sqrt{1-y^2}+y^2\\ &\iff 0\geq 2y\sqrt{1-y^2}\end{aligned}$$

- Si $y=1$ *alors* $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=1$ *et* $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=1$.
- Si $y\in]0,1[$ *alors ceci signifie que :* $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\notin[1,+\infty[$.

■

$$x_2\geq 1$$

On a

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \geq 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1+\sqrt{1-y^2} \geq y \\
&\Longleftrightarrow \quad 1+\sqrt{1-y^2} \geq y \\
&\Longleftrightarrow \quad 1+2\sqrt{1-y^2}+1-y^2 \geq y^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2+2\sqrt{1-y^2}-2y^2 \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1+\sqrt{1-y^2}-y^2 \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(1-y^2\right)+\sqrt{1-y^2} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{1-y^2}\left(\sqrt{1-y^2}+1\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Puisque la dernière assertion est vraie donc : $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \in [1,+\infty[$.

Alors l'équation $g(x)=y$ *admet une unique solution dans* $[1,+\infty[$, *ceci signifie que* g *réalise une bijection de* I *sur* J.

Et

$$\begin{aligned}
g^{-1}: \quad]0,1] &\longrightarrow [1,+\infty[\\
x &\longmapsto \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com