Correcton du devoir surveillé

Exercice 1 .

1. *Montrons que* : $(\forall x \in [-1,0])\,,\quad 1 \leq 2\sqrt{x+1} - x \leq 2.$

   Soit $x \in [-1,0]\,.$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & 2\sqrt{x+1} - x \leq 2 \\ & \Longleftrightarrow & x+1 \leq 2\sqrt{x+1} \leq x+2 \\ & \Longleftrightarrow & (x+1)^2 \leq \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \leq (x+2)^2 \\ & \Longleftrightarrow & (x+1)^2 - 4(x+1) \leq 0 \quad et \quad 0 \leq (x+2)^2 - \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \\ & \Longleftrightarrow & (x+1)(x-3) \leq 0 \quad et \quad 0 \leq x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 \\ & \Longleftrightarrow & (x+1)(x-3) \leq 0 \quad et \quad 0 \leq x^2 \end{array}$$

   Comme $(x+1)(x-3) \leq 0$ *et* $0 \leq x^2$ *pour tout* x *de* $[-1,0]\,.$ *Alors :*

$$(\forall x \in [-1,0])\,,\quad 1 \leq 2\sqrt{x+1} - x \leq 2$$

2. *On considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcll} f & : & [-1,0] & \longrightarrow & [1,2] \\ & & x & \longmapsto & 2\sqrt{x+1} - x \end{array}$$

   a) *Vérifions que* : $(\forall x \in [-1,0])\,,\quad f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$:

   Soit $x \in [-1,0]\,.$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2\sqrt{x+1} - x \\ & = & 1 + 2\sqrt{x+1} - x - 1 \\ & = & -\sqrt{x+1}^2 + 2\sqrt{x+1} + 1 \\ & = & -\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\sqrt{x+1} + 1\right) + 1 + 1 \\ & = & 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 \end{array}$$

   Donc

$$(\forall x \in [-1,0])\,,\quad f(x) = 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$$

b) *Montrons que f est bijective.*

Soit $y \in [1,2]$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $[-1,0]$.

Soit $x \in [-1,0]$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & y \iff 2 - \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 = y \\ & \iff & \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 = 2 - y \\ & \iff & \left|\sqrt{x+1} - 1\right| = \sqrt{2-y} \quad , \quad (2 - y \geq 0) \\ & \iff & -\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2-y} \quad , \quad \sqrt{x+1} - 1 \leq 0 \ \textit{pour } x \in [-1,0]. \\ & \iff & \sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{2-y} \\ & \iff & x + 1 = \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2 \\ & \iff & x = \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2 - 1 \end{array}$$

Comme : $\left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2 - 1 \in [-1,0]$, ceci signifie que l'application f est bijective.
Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} \ : \ [1,2] & \longrightarrow & [-1,0] \\ x & \longmapsto & \left(1 - \sqrt{2-x}\right)^2 - 1 \end{array}$$

Exercice 2 *On considère l'application*

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

1. **a)** *Vérifions que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.*

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{2x}{x^2+1} = f(x)$$

b) *On a : $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$. Ceci signifie que l'application f n'est pas injective.*

2. Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $|f(x)| \leq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & \leq & 1 \iff -1 \leq f(x) \leq 1 \\ & \iff & -1 \leq \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1 \\ & \iff & -x^2 - 1 \leq 2x \leq x^2 + 1 \\ & \iff & -x^2 - 1 - 2x \leq 0 \quad \textit{et} \quad 0 \leq x^2 - 2x + 1 \\ & \iff & (x+1)^2 \geq 0 \quad \textit{et}\ 0 \leq (x-1)^2 \end{array}$$

Comme : $(x+1)^2 \geq 0$ *et* $0 \leq (x-1)^2$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$. *Alors :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad |f(x)| \leq 1$$

L'application f *n'est pas surjective, car* 4 *n' a pas d'antécédent par* f.

Exercice 3 .

1. *Montrons que :* $(\forall x \in [0,1]), \ \ 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \leq 1.$

   Soit $x \in [0,1]$.

   On a : $\sqrt{x}+\sqrt{1-x} \succ 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$. *Donc*

$$(\forall x \in [0,1]), \ 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \qquad (1)$$

   D'autre part, etudions le signe de : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} - 1 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

   comme : $-\sqrt{1-x} \leq 0$ *pour tout* x *de* $[0,1]$, *donc :*

$$(\forall x \in [0,1]), \ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \ \leq 1 \qquad (2)$$

   D'où d'après (1) *et* (2) *on en déduit que :*

$$(\forall x \in [0,1]), \ 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \leq 1$$

2. *Montrons que l'application* f *est bijective telle que :*

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \end{array}$$

   Soit $y \in [0,1]$. *Résolvons l'équation* $f(x) = y$ *dans* $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & y \\ & \iff & \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = y \\ & \iff & \sqrt{x} = y\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right) \\ & \iff & \sqrt{x}\,(1-y) = y\sqrt{1-x} \\ & \iff & x\,(1-y)^2 = y^2\,(1-x) \\ & \iff & x\,(1-y)^2 + y^2 x = y^2 \\ & \iff & x\left((1-y)^2+y^2\right) = y^2 \\ & \iff & x = \dfrac{y^2}{(1-y)^2+y^2} = \dfrac{y^2}{2y^2-2y+1} \end{array}$$

Comme : $\frac{y^2}{2y^2-2y+1} \in [0,1]$, *ceci signifie que l'application* f *est bijective. Sa réciproque est l'application* f^{-1} *définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} f^{-1} & : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longrightarrow & \dfrac{x^2}{2x^2-2x+1} \end{array}$$

Exercice 4 .

On considère l'application f *définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-2x+2} \end{array}$$

1. *Montrons que* f *n'est pas injective.*

   On a : $f(0) = f(2) = \frac{1}{2}$ *mais* $0 \neq 2$. *Ceci signifie que l'application* f *n'est pas injective.*

2. *Montrons que :* $f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

   On montre par double iclusions.

   $\subset)$ *Soit* $y \in f(\mathbb{R})$, *il existe* x *dans* $\mathbb{R}$ *tel que :* $f(x) = y$.

   On a :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1}$$

   comme : $(x-1)^2 \geq 0$, *alors :* $(x-1)^2 + 1 \geq 1$, *donc :* $f(x) \leq 1$. *C'est-à-dire :* $y \leq 1$.
   D'autre part, on a : $0 < \frac{1}{(x-1)^2+1}$, *alors :* $0 < y$.
   Donc $y \in]0,1]$, *c'est-à-dire :* $f(\mathbb{R}) \subset]0,1]$.

$\supset$ *Soit* $y \in \left]0,1\right]$. *Résolvons l'équation* $f(x) = y$ *dans* $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff \frac{1}{x^2-2x+2} = y \\ &\iff 1 = \left(x^2-2x+2\right) y \quad , \left(x^2-2x+2 \neq 0 \quad pour\ x \in \mathbb{R}\ \right) \\ &\iff yx^2 - 2xy + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ *de l'équation est :*

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2y)^2 - 4 \times y \times (2y-1) \\ &= 4y\,(1-y) \end{aligned}$$

on a $0 \prec y \leq 1$, *alors :* $0 \leq 1-y \prec 1$ *donc :* $\Delta \geq 0$.
donc l'équation $f(x) = y$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}$. *Ceci signifie que :* $y \in f(\mathbb{R})$. *C'est-à-dire :* $\left]0,1\right] \subset f(\mathbb{R})$.
Donc

$$f(\mathbb{R}) = \left]0,1\right]$$

3. *L'application* f *n'est pas surjective, car* 2 *n' a pas d'antécédent par* f.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com