Correction du devoir surveillé

Exercice 1 .

1. *Soient* $(a, b, x, y) \in \mathbb{R}_*^4$.

   On suppose que $ax + by = 1$, *et on montre que :* $\frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2 + b^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+y^2} - \left(a^2+b^2\right) &= \frac{1-\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left(a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+y^2b^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left((ax+by)^2-2axby+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left(1-2axby+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-1+2axby-a^2y^2-b^2x^2}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-\left(a^2y^2-2aybx+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-(ay-bx)^2}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

   Donc $\frac{1}{x^2+y^2} - (a^2+b^2) \leq 0$, *c'est-à-dire :* $\frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2 + b^2$. *D'où*

$$ax + by = 1 \implies \frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2 + b^2.$$

2. *Soit* $(a, b) \in (]0, +\infty[)^2$.

$$
\begin{array}{rcl}
a^2 & = & b+1 \\
& \Longrightarrow & a^2-b=1 \\
& \Longrightarrow & \left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)=1 \\
& \Longrightarrow & \sqrt{a-\sqrt{b}}\times\sqrt{a+\sqrt{b}}=1 \\
& \Longrightarrow & 2\sqrt{a-\sqrt{b}}\times\sqrt{a+\sqrt{b}}=2 \\
& \Longrightarrow & 2a+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\times\sqrt{a+\sqrt{b}}-2a=2 \\
& \Longrightarrow & a+\sqrt{b}+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\times\sqrt{a+\sqrt{b}}+a-\sqrt{b}=2\left(a+1\right) \\
& \Longrightarrow & \left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2+2\sqrt{a-\sqrt{b}}\times\sqrt{a+\sqrt{b}}+\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{2\left(a+1\right)}\right)^2 \\
& \Longrightarrow & \left(\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{2\left(a+1\right)}\right)^2 \\
& \Longrightarrow & \sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a+1\right)} \\
& \Longrightarrow & \dfrac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2\left(a+1\right)}}=1.
\end{array}
$$

Donc

$$\forall\left(a,b\right)\in\left(]0,+\infty[\right)^2,\quad a^2=b+1\Longrightarrow\frac{\sqrt{a-\sqrt{b}}+\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt{2\left(a+1\right)}}=1$$

3. **a)** *Soient* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{array}{rcl}
\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2 & = & a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \\
& = & 4ab
\end{array}
$$

b) *Soient* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

L'assertion : $|ab|\succ\frac{c^2}{2}\Longrightarrow|a-b|\succ c$ *ou* $|a+b|\succ c$, *est équivalente à :*

$$|a-b|\leq c\ \ \textit{et}\ \ |a+b|\leq c\Longrightarrow|ab|\leq\frac{c^2}{2}$$

On suppose que $|a-b|\leq c$ *et* $|a-b|\leq c$ *et on montre que :* $|ab|\leq\frac{c^2}{2}$.

On a $4ab=\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2$, *donc*

$$|4ab|=\left|\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2\right|\leq|a+b|^2+|a-b|^2$$

et comme $|a+b|^2\leq c^2$ *et* $|a-b|^2\leq c^2$, *alors*

$$|4ab|\leq 2c^2$$

par suite

$$|ab| \leq \frac{c^2}{2}.$$

Par contraposition ceci équivalent à :

$$|ab| \succ \frac{c^2}{2} \implies |a-b| \succ c \quad ou \quad |a+b| \succ c$$

4. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}_*^2$.

   L'assertion : $y \neq \frac{-3}{4}x \implies \frac{x-y}{x+y} \neq 7$, *est équivalente à :*

$$\frac{x-y}{x+y} = 7 \implies y = \frac{-3}{4}x$$

   On a

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{x+y} &= 7 \\ &\implies x-y = 7\,(x+y) \\ &\implies -y-7y = -x+7x \\ &\implies -8y = 6x \\ &\implies y = \frac{-6x}{8} \\ &\implies y = \frac{-3}{4}x \end{aligned}$$

   Par contraposition ceci équivalent à :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}_*^2, \quad y \neq \frac{-3}{4}x \implies \frac{x-y}{x+y} \neq 7$$

5. *Soient* n *et* m *deux entiers naturels tels que* n *est impair et* m *est pair.*

   On suppose par l'absurde que : $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. *Donc*

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \frac{n}{m} = p$$

   Alors $n = p.m$, *ce qui est contradictoire puisque* n *est impair et* $m.p$ *est pair. Donc*

$$\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$$

Exercice 2 .

1. *Soient* $(a,b) \in ([0,+\infty[)^2$.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{a+1}-\sqrt{b+1} & < & \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{a+1}+\sqrt{b} < \sqrt{a}+\sqrt{b+1} \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b+1}\right)^2 \\ & \Longleftrightarrow & (a+1)+2\sqrt{(a+1)\,b}+b < a+2\sqrt{(b+1)\,a}+(b+1) \\ & \Longleftrightarrow & 2\sqrt{(a+1)\,b} < 2\sqrt{(b+1)\,a} \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{(a+1)\,b} < \sqrt{(b+1)\,a} \\ & \Longleftrightarrow & (a+1)\,b < (b+1)\,a \\ & \Longleftrightarrow & ab+b < ab+a \\ & \Longleftrightarrow & b < a \end{array}$$

Donc

$$\forall\,(a,b) \in ([0,+\infty[)^2\,, \quad \sqrt{a+1}-\sqrt{b+1} < \sqrt{a}-\sqrt{b} \iff b < a$$

2. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} & = & 2 \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{x^2+1}=1 \quad et \quad \sqrt{y^2+1}=1 \\ & \Longleftrightarrow & x^2=0 \quad et\ y^2=0 \\ & \Longleftrightarrow & x=0\ \ et\ y=0 \\ & \Longleftrightarrow & x=y=0 \end{array}$$

Donc

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \iff \quad x=y=0$$

3. **a)** *Soient a et b deux réels non nuls.*

$$\begin{array}{rcl} \left(a+\dfrac{1}{a}\right) & = & \left(b+\dfrac{1}{b}\right) \\ & \Longleftrightarrow & a-b+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=0 \\ & \Longleftrightarrow & (a-b)+\dfrac{b-a}{ab}=0 \\ & \Longleftrightarrow & (a-b)-\dfrac{(a-b)}{ab}=0 \\ & \Longleftrightarrow & (a-b)\left(1-\dfrac{1}{ab}\right)=0 \\ & \Longleftrightarrow & a=b \quad ou \quad 1=\dfrac{1}{ab} \\ & \Longleftrightarrow & a=b \quad ou \quad ab=1 \\ & \Longleftrightarrow & a=b\ \ ou\ a=\dfrac{1}{b} \end{array}$$

Donc

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(b+\frac{1}{b}\right) \iff a=b \quad ou \quad a=\frac{1}{b}$$

b) *On déduit l'ensemble de solutions de l'équation* $(E) : x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$.

L'équation existe si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2} &= \frac{17}{4} \\ &\iff x^2+\frac{1}{x^2}=4+\frac{1}{4} \\ &\iff x^2=4 \quad ou \quad x^2=\frac{1}{4} \\ &\iff x=2 \text{ ou } x=-2 \text{ ou } x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation (E) *est*

$$S=\left\{-2,\frac{-1}{2},\frac{1}{2},2\right\}$$

Exercice 3 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose :* $u_n=(1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

1. **a)** *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2(n+1)+1}\right)^2 \\ &= (1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 \\ &= \underbrace{(1+1)^2\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2}_{=u_n}\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 \\ &= u_n\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=u_n\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2.$$

b) *Montrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \succ 2n+3$.

1. ■ *Pour* $n=0$, *on a* $2 \succ 3$ *l'inégalité est vraie.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n \succ 2n+3$, *et on montre que :* $u_{n+1} \succ 2n+5$.

On a

$$u_{n+1}=u_n\times\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$$

et comme $u_n \succ 2n+3$*, alors*

$$u_{n+1} \succ (2n+3) \times \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2$$

puisque $(2n+3) \times \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2 = \frac{4(n+2)^2}{2n+3} \succ 2n+5$*, donc*

$$u_{n+1} \succ 2n+5.$$

D'après le principe de récurrence on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \succ 2n+3$$

3) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, 6 *divise* $n(n+1)(n+2)$.

1. ■ *Pour* $n = 0$*, on a* 6 *divise* 0*. L'assertion est vraie.*

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* 6 *divise* $n(n+1)(n+2)$*, et on montre que :* 6 *divise* $(n+1)(n+2)(n+3)$.

On a 6 *divise* $n(n+1)(n+2)$*, alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n(n+1)(n+2) = 6k$.

Alors

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) &= \underbrace{n(n+1)(n+2)}_{=6k} + 3(n+1)(n+2) \\ &= 6k + 3(n+1)(n+2) \\ &= 6k + 3\left(\underbrace{n(n+1)}_{=2p} + 2(n+1)\right) \\ &= 6k + 3(2p + 2(n+1)) \\ &= 6k + 6(p + (n+1)) \\ &= 6(k + p + n + 1)\end{aligned}$$

On pose $p' = k + p + n + 1 \in \mathbb{N}$*, on obtient*

$$(n+1)(n+2)(n+3) = 6p'.$$

Ceci signifie que 6 *divise* $(n+1)(n+2)(n+3)$.

■ *D'après le principe de récurrence on conclut que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad 6 \text{ divise } n(n+1)(n+2).$$

Exercice 4 *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *le système :* $\begin{cases} x^3 + x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + xy - y + y^2 = 0 \end{cases}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.

$$
\begin{aligned}
& \left\{\begin{array}{c} x^3+x^2-2=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{c} \left(x^3-1\right)+\left(x^2-1\right)=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{c} (x-1)\left(x^2+x+1\right)+(x-1)(x+1)=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{c} (x-1)\left(x^2+2x+2\right)=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{c} x=1 \quad ou \quad x^2+2x+2=0 \\ x^2+xy-y+y^2=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2+xy-y+y^2=0 \ et \ \left(x=1 \quad ou \quad x^2+2x+2=0\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(x^2+xy-y+y^2=0 \ et \ x=1\right) \ ou \ \left(x^2+xy-y+y^2=0 \ et \ \underbrace{x^2+2x+2=0}_{F}\right) \\
\Longleftrightarrow \quad & \underbrace{1+y^2=0}_{F} \ et \ x=1
\end{aligned}
$$

Donc

$$S=\varnothing$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com