Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Logique et Raisonnement

Logique

Assertions (Propositions)

Définition 1 *En logique, une assertion (ou proposition) est une phrase à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).*

Une assertion peut s'exprimer en langage courrant ou en symboles mathématiques (on introduira les plus fréquents dans ce chapitre, d'autres viendront au fur et à mesure des besoins).

Exemple 2 .

- "$2 + 2 = 4$" *est une assertion vraie.*
- "$2 \times 3 = 6$" *est une assertion vraie.*
- "$2 \times 3 = 7$" *est une assertion fausse.*
- *"Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 \geq 0$" est une assertion vraie.*

À partir d'une ou plusieurs assertions, on peut en construire d'autres. C'est l'objet des paragraphes suivants.

Connecteurs logiques

Soient P et Q deux assertions. Les connecteurs logiques sont :

Opérateur " et " .

L'assertion « P et Q » (que l'on peut noter $P \vee Q$) est l'assertion qui est vraie si P et Q sont vraies, et fausse si au moins l'une des deux assertions P ou Q est fausse.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Opérateur " ou " .

L'assertion « P ou Q » (que l'on peut noter $P \wedge Q$) est l'assertion qui est vraie si au moins l'une des deux assertions P ou Q est vraie, et fausse si P et Q sont fausses.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La négation " non " .

Soit P une assertion. On définit sa négation, notée P (ou aussi $nonP$ ou $\rceil P$ ou $\overline{P}$), à partir de sa table de vérité.

P	V	F
non P	F	V

Exemple 3 *Donner la négation des assertions suivantes* :

■

$$P : \text{ “ } f \text{ est la fonction nulle ”}$$

et pour la négation

$$\overline{P} : \text{ “ } f \text{ n'est pas le fonction nulle ”}$$

■

$$Q : \text{ “ } x \geq 0 \text{ ”}$$

et pour la négation

$$\overline{Q} : \text{ “ } x < 0 \text{ ”}$$

■

$$R : \text{ “ } n \in \mathbb{Z} \text{ ”}$$

et pour la négation

$$\overline{R} : \text{ “ } n \notin \mathbb{Z} \text{ ”}$$

L'implication $\Longrightarrow$.

Définition 4 *Étant données deux assertions P et Q, l'assertion “ Si P alors Q ”, ou “ P implique Q ” a même valeur logique que (non P) ou Q est notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$\overline{P}$	$P \implies Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Exemple 5 .

- “ $-1 = 1 \implies (-1)^2 = 1$ ” *L'assertion est vraie.*
- “ $(-2)^2 = 2^2 \implies -2 = 2$ ” *L'assertion est fausse.*

Remarque 6 *La négation de $P \implies Q$ est : P ou $\overline{Q}$.*

Exemple 7 *Soit n dans $\mathbb{N}$. On considère les deux assertions suivantes :*

$$P : \text{“ } n < 2 \text{ ” } \quad \textit{et} \quad Q : \text{“ } n^2 = n \text{ ”}$$

Montrer que : $P \implies Q$.

On suppose que l'assertion P est vraie. C'est-à-dire : $n < 2$ tel que $n \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que : $n \in \{0, 1\}$.

- Si $n = 0$, *alors* : $n^2 = 0 = n$.
- Si $n = 1$, *alors* : $n^2 = 1 = n$.

  Donc

$$P \implies Q.$$

Exemple 8 *Soit x et y deux réels non nuls. On considère les deux assertions suivantes :*

$$P : \text{“ } 2x + y = 1 \text{ ” } \quad \textit{et} \quad Q : \text{“ } \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20 \text{ ”}$$

Montrer que : $P \implies Q$.

On suppose que l'assertion P est vraie. C'est-à-dire : $2x + 4y = 1$ tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrons que l'assertion Q est vraie.

On a : $2x + 4y = 1$ d'où $x = \frac{1}{2} - 2y$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+y^2}-20 &= \frac{1-20\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-20\left(\left(\frac{1}{2}-2y\right)^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-20\left(\frac{1}{4}-2y+5y^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-5+40y-100y^2}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-4+40y-100y^2}{x^2+y^2} \\
&= -\frac{\left(10y-2\right)^2}{x^2+y^2} \leq 0
\end{aligned}$$

Donc : $\frac{1}{x^2+y^2} \leq 20$, *ceci signifie que :*

$$P \implies Q$$

L'équivalence $\iff$.

L'équivalence est définie par :

$$"P \iff Q" \text{ est l'assertion } "P \implies Q \textit{ et } Q \implies P"$$

On dira "P est équivalent à Q " ou " P équivaut à Q " ou "P si et seulement si Q ". Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

Remarque 9 .

- *L'équivalence logique joue pour les assertions, le rôle que joue l'égalité pour les nombres.*
- *Une équivalence signifie* ***DEUX implications****, l'une de « gauche à droite » et l'autre de « droite à gauche ».*
- *Quand vous écrivez* $P \iff Q$*, vous devez être convaincu que l'assertion de gauche* P ***entraîne*** *l'assertion de droite* Q *et aussi que l'assertion de droite* Q ***entraîne*** *l'assertion de gauche* P*.*

Propriété 10 (*Lois de MORGAN*)
Soient P et Q deux assertions.

- $\overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$.
- $\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$.

Démonstration 11 *On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.*

P	Q	P ou Q	$\overline{P \text{ ou } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$ et $\overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

et

P	Q	P et Q	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$ ou $\overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes. □

Remarque 12 *Soit P une proposition.* P et $P \iff P$ et P ou $P \iff P$.

Théorème 13 *Soient P, Q et R trois assertions.*

1. P ou $Q \iff Q$ ou P et P et $Q \iff Q$ et P .
2. $(P$ ou $Q)$ ou $R \iff P$ ou $(Q$ ou $R)$ et $(P$ et $Q)$ et $R \iff P$ et $(Q$ et $R)$.
3. $(P$ ou $Q)$ et $R \iff (P$ et $R)$ ou $(Q$ et $R)$
4. $(P$ et $Q)$ ou $R \iff (P$ ou $R)$ et $(Q$ ou $R)$

Démonstration 14 *Démontrons par exemple la troisième et la quatrième équivalence à l'aide d'une table de vérité.*

3)

P	Q	R	P ou Q	$(P$ ou $Q)$ et R	P et R	Q et R	$(P$ et $R)$ ou $(Q$ et $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

4)

P	Q	R	P et Q	$(P$ et $Q)$ ou R	P ou R	Q ou R	$(P$ ou $R)$ et $(Q$ ou $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les cinquième et huitième colonnes.
$\square$

Exemple 15 *Soient P et Q deux assertions.*
Montrer que : $(P \iff Q) \iff ((P \implies Q)$ *ou* $(Q \implies P))$.
Il s'agit de vérifier que les deux assertions $P \iff Q$ et $(P \implies Q)$ ou $(Q \implies P)$ ont les mêmes valeurs de vérité.

P	Q	$P \iff Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$((P \implies Q)$ ou $(Q \implies P))$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

On lit bien les mêmes valeurs de vérité dans les troisième et sixième colonnes.

Exemple 16 *Soit P une assertion. Montrer que* : $\left(\overline{\overline{P}}\right) \iff P$.

Remarque 17 *Les expressions " Condition nécessaire et suffisante (CNS) ", " si et seulement si (ssi) ", " il faut et il suffit " signifient toutes « logiquement équivalent » ou encore " $\iff$ "*

Les quantificateurs

Le quantificateur $\forall$: " pour tout "

Une assertion P peut dépendre d'un réel x, par exemple " $x^2 \geq 1$ ", l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x. Une telle assertion, dont les valeurs de vérité sont fonction d'une (ou plusieurs) variable(s) s'appelle un **prédicat.**

L'assertion

$$\text{“ } \forall x \in E,\ P(x) \text{ ”}$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit " Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie ".

Définition 18 $\forall$ *s'appelle le quantificateur universel.*

Remarque 19 *Après* $\forall$*, la virgule se lit " on a " ou ne se lit pas.*

Exemple 20 *.*

- " $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 \geq 0$ " *est une assertion vraie.*
- "$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \underbrace{x = 1 \iff x^2 = 1}_{P(x)}$ " *est une assertion fausse car* $-1 \in \mathbb{R}$ *et* $P(-1)$ *est fausse.*

$$\left(P(-1) :\ \underbrace{-1 = 1}_{F} \iff \underbrace{(-1)^2 = 1}_{V} \right).$$

- "$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \underbrace{x^2 \succ 1 \implies x \succ 1}_{P(x)}$ " *est une assertion fausse car* $-2 \in \mathbb{R}$ *et* $P(-2)$ *est fausse.*

$$\left(P(-2) :\ \underbrace{(-2)^2 \succ 1}_{V} \implies \underbrace{-2 \succ 1}_{F} \right).$$

Le quantificateur $\exists$ **: " il existe "**

L'assertion

$$\text{" } \exists x \in E,\ \ P(x) \text{ "}$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit , " il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ".

Définition 21 $\exists$ *s'appelle le quantificateur existentiel.*

Remarque 22 *Après* $\exists$*, la virgule se lit " tel que ".*

Exemple 23 *.*

- " $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 - n = 0$ " *est une assertion vraie car :* $0 \in \mathbb{N}$ *et* $0^2 - 0 = 0$.
- " $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$ " *est une assertion fausse car (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).*
- "$\exists x \in \mathbb{R},\ x(x-1) < 0$ "*est une assertion vraie* (*par exemple* $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ *vérifie* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0$).

Montrer une assertion universelle

Pour démontrer une assertion de type " $\forall x \in E,\ P(x)$ " on commence par l'introduction d'une variable x par " soit " est un acte de naissance pour x. Une fois qu'une preuve est terminée, les variables qui y figuraient ne désignent plus rien.

Exemple 24 *On veut montrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} &= \frac{2x - x^2 - 1}{2\left(x^2+1\right)} \\ &= \frac{-\left(x^2 - 2x + 1\right)}{2\left(x^2+1\right)} \\ &= \frac{-\left(x-1\right)^2}{2\left(x^2+1\right)}. \end{aligned}$$

Comme : $\frac{-(x+1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer l'existence d'un objet

Quand on veut montrer que : " $\exists x \in E,\ P(x)$ " et qu'on déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$, on écrit : " Posons $x = ...$ " puis on vérifie que x satisfait la propriété P.

Exemple 25 *Montrer que :*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \sin x = x.$$

Posons $x = 0$. *Alors* : $\sin 0 = 0$. *Donc*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \sin x = x.$$

Remarque 26 .

- *L'assertion : " il existe un et un seul élément x de E tel que $P(x)$ est vraie " s'écrit en abrégé :*

$$\text{"}\ \exists! x \in E,\ P(x)\ \text{"}$$

- *Les quantificateurs ne sont pas des abréviations.*

La négation des quantificateurs

La négation de " $\forall x \in E,\ P(x)$ " *est* " $\exists x \in E,\ \text{non } P(x)$ "

La négation de " $\exists x \in E,\ P(x)$ " *est* " $\forall x \in E,\ \text{non } P(x)$ "

" Le contraire de $\forall$ est $\exists$ et le contraire de $\exists$ est $\forall$ "

Exemple 27 .

- *La négation de* " $\forall x \in [1, +\infty[,\ \ x+1 \in \mathbb{Z}$ " *est* " $\exists x \in [1, +\infty[,\ \ x+1 \notin \mathbb{Z}$ ".

- *La négation de* “ $\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2+1=0$ ” *est* “ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2+1 \neq 0$ ”.
- *La négation de* “ $\exists n \in \mathbb{N},\ \ n^2=n$ ” *est* “ $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n^2 \neq n$ ”.
- *La négation de* “ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x<0$ ” *est* “ $\exists x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 0$ ”.

Remarque 28 *Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le "pour tout " en " il existe " et inversement, puis on prend la négation de l'assertion P.*

Avec une succession de quantificateures.

Exemple 29 .

- *La négation de* “ $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y<0), x+y \geq 0$ ” *est* “ $(\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y<0),\ \ x+y<0$ ”.
- *La négation de* “ $(\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}), x^2+y^2=0$ ” *est* “ $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}),\ \ x^2+y^2 \neq 0$ ”.
- *La négation de* “ $(\exists x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}), x+y \geq 10$ ” *est* “ $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}),\ \ x+y<10$ ”.

Remarque 30 .

L'ordre des quantificateurs est très important. On considère les deux assertions :

$$\text{“ } (\forall x \in \mathbb{R})\ \ (\exists y \in \mathbb{R}),\quad x+y \succ 0 \text{ ”}$$

et

$$\text{“ } (\exists y \in \mathbb{R})\ \ (\forall x \in \mathbb{R}),\quad x+y \succ 0 \text{ ”}$$

*La première assertion est vraie. " Pour tout réel x, il existe un réel y (**qui peut donc dépendre** de x) tel que $x+y \succ 0$ " (par exemple on peut prendre $y=-x+1$). C'est donc une assertion vraie.*

On conclut que :

$$Quand\ on\ écrit\ \forall y\ ,\exists x\ l'élément\ x\ est\ fourni\ après\ chaque\ y\ .$$

Il dépend de y et peut donc varier quand y varie

La deuxième se lit " Il existe un réel y tel que pour tout réel x, $x+y \succ 0$. " Cette assertion est fausse. Cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x.

Exemple 31 .

- *On considère l'assertion P telle que :*

  $$P: \text{ “ } (\forall x \in \mathbb{Z}),\ \ (\exists y \in \mathbb{Z}),\quad x-y=3 \text{ ”}$$

  L'assertion P est vraie. En effet pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe $y \in \mathbb{Z}$ (on peut prendre $y=x-3$) tel que : $x-y=3$.

- *On considère l'assertion Q telle que :*

  $$Q: \text{ “ } (\exists x \in \mathbb{N}),\quad (\forall y \in \mathbb{N}),\quad x \leq y \text{ ”}$$

  L'assertion Q est vraie. Car $0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in \mathbb{N}: 0 \leq y$.

Modes de raisonnement

Raisonnement direct

Pour montrer l'implication $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 32 *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ est pair} \implies n^2 \text{ est pair}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que n est pair. Donc

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad n = 2k.$$

Alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 2 \times \left(2k^2\right) \end{aligned}$$

comme $2k^2 \in \mathbb{N}$. On déduit que n^2 est pair.

Raisonnement par implication successives

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivante :

$$P \implies P_1 \text{ et } P_1 \implies P_2 \text{ et...et } P_n \implies Q$$

conclusion on a bien montré $P \implies Q$.

Exemple 33 *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{x}} &= 1-\sqrt{x} \\ &\implies 1 = \left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right) \\ &\implies 1 = 1 - x \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$$

Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$P \implies Q \iff \overline{Q} \implies \overline{P}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \implies Q$, il suffit de montrer que $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Exemple 34 *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \textit{ est pair} \implies n \textit{ est pair}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
L'assertion : n^2 *est pair* $\Longrightarrow$ n *est pair, est équivalente à :*

$$n \textit{ est impair} \implies n^2 \textit{ est impair}$$

On suppose que n *est impair. Donc*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad n = 2k + 1.$$

Alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \end{aligned}$$

on pose $p = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, *on obtient*

$$n^2 = 2p + 1.$$

Donc n^2 *est impair.*
Conclusion : par contraposition ceci est équivalent à :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \textit{ est pair} \implies n \textit{ est pair}$$

Raisonnement par équivalences

Pour montrer l'équivalence $P \iff Q$, on peut :

- ou bien raisonner par double implication, c'est-à-dire montrer successivement les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$,
- ou bien raisonner par équivalences, c'est-à-dire modifier P de proche en proche jusqu'à obtenir Q **en préservant les équivalences à chaque étape**. On rédige alors de la manière suivante :

  $$P \iff ... \iff ... \iff Q$$

  conclusion on a bien montré l'équivalence $P \iff Q$.

Exemple 35 *Montrer que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \iff xy = 1 \quad ou \quad x = y$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+x+1} &= \frac{y}{y^2+y+1} \\ &\iff x\left(y^2+y+1\right) = y\left(x^2+x+1\right) \\ &\iff xy^2+xy+x-yx^2-yx-y = 0 \\ &\iff xy\,(y-x)-(y-x) = 0 \\ &\iff (y-x)\,(xy-1) = 0 \\ &\iff x = y \quad ou\; xy = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \iff xy = 1 \quad ou \quad x = y$$

Exemple 36 *Montrer que :*

$$\forall x \in [-2,2]\,, \quad \sqrt{4-x^2}-x \leq 2\sqrt{2}$$

Soit $x \in [-2,2]$.

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2}-x &\leq 2\sqrt{2} \\ &\iff \sqrt{4-x^2} \leq x+2\sqrt{2} \\ &\iff 4-x^2 \leq x^2+4x\sqrt{2}+8 \\ &\iff -2x^2-4x\sqrt{2}-4 \leq 0 \\ &\iff x^2+2x\sqrt{2}+2 \geq 0 \\ &\iff \left(x+\sqrt{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Comme : $\left(x+\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$ *pour tout* $x \in [-2,2]$. *Alors :*

$$\forall x \in [-2,2]\,, \quad \sqrt{4-x^2}-x \leq 2\sqrt{2}$$

Raisonnement par disjonction de cas

Ce raisonnement est utilisé pour montrer une assertion de type " $\forall x \in E,\ P(x)$ " avec $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, alors pour ce faire on sépare les raisonnements suivant que $x \in E_1$, $x \in E_2$,...,$x \in E_n$.

Exemple 37 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

$$(E):\ x^2-2\,(1+m)\,x+4 = 0$$

tel que m *est un paramètre.*
Calculons le discriminant Δ *de l'équation* (E), *on a*

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\,(1+m)^2-16 \\ &= 4\,(m-1)\,(m+3) \end{aligned}$$

1ère cas : Si $\Delta < 0$ *c'est-à-dire :* $m \in \left]-3, 1\right[$. *Alors l'ensemble des solutions de l'équation* (E) *est :*

$$S = \varnothing$$

2ème cas : Si $\Delta = 0$ *c'est-à-dire :* $m = 1$ *ou* $m = -3$. *Alors l'équation admet une unique solution* $1 + m$. *D'où :*

$$S = \{1 + m\}$$

3ème cas : Si $\Delta \succ 0$ *c'est-à-dire :* $m \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]1, +\infty\right[$. *Alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :*

$$x_1 = m + 1 - \sqrt{(m-1)(m+3)} \quad \text{et} \quad x_2 = m + 1 + \sqrt{(m-1)(m+3)}$$

D'où

$$S = \left\{ m + 1 - \sqrt{(m-1)(m+3)}, m + 1 + \sqrt{(m-1)(m+3)} \right\}$$

Exemple 38 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

$$(E) : 3 - 2|x - 4| = 2x + 5$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

■ Si $x - 4 \leq 0$, *c'est-à-dire* $x \leq 4$. *L'équation* (E) *devient :*

$$\begin{aligned} 3 + 2(x-4) &= 2x + 5 \\ &\iff 2x - 2x = 5 + 8 - 3 \\ &\iff 0 = 10 \quad (\textit{Ce qui est impossible}) \end{aligned}$$

■ Si $x - 4 \geq 0$, *c'est-à-dire* $x \geq 4$. *L'équation* (E) *devient :*

$$3 - 2(x-4) = 2x + 5 \iff x = \frac{3}{2}$$

On a : $\frac{3}{2} \notin \left[4, +\infty\right[$.

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \varnothing$$

Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer "$P \implies Q$" repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc "$P \implies Q$" est vraie.

Exemple 39 *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

$$x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $x \notin \mathbb{Q}$ *et* $1 + x \in \mathbb{Q}$.

Comme $1 + x \in \mathbb{Q}$, *il existe* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *tel que :* $1 + x = \frac{p}{q}$. *Donc :*

$$\begin{aligned} x &= (1 + x) - 1 \\ &= \frac{p}{q} - 1 \\ &= \frac{p - q}{q} \in \mathbb{Q} \quad \textit{contradiction avec l'hypothèse } x \in \mathbb{Q}! \end{aligned}$$

Conclusion :

$$x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$$

Exemple 40 *Soient* $a, b \geq 0$. *Montrer que si* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *alors* $a = b$.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *et* $a \neq b$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b} &= \frac{b}{1+a} \\ &\implies a(1 + a) = b(1 + b) \\ &\implies a + a^2 = b + b^2 \\ &\implies a^2 - b^2 + a - b = 0 \\ &\implies (a - b)(a + b) + (a - b) = 0 \\ &\implies (a - b)(a + b + 1) = 0 \\ &\implies a + b + 1 = 0 \quad , \quad (a - b \neq 0) \\ &\implies a + b = -1 \end{aligned}$$

La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *alors* $a = b$.

Remarque 41 *Pour montrer que l'assertion* P *est vraie, le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que* P *est fausse et puis à aboutir à une contradiction.*

Exemple 42 *Montrer que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad 4 \cos x \neq x^2 - 4x + 12$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que :

$$(\exists x \in \mathbb{R}), \ 4 \cos x = x^2 - 4x + 12$$

$$\begin{array}{rcl} 4\cos x & = & x^2 - 4x + 12 \\ & \Longleftrightarrow & 4\cos x = 4\left(\dfrac{1}{4}x^2 - x + 3\right) \\ & \Longleftrightarrow & \cos x = \left(\dfrac{1}{4}x^2 - 2\times\dfrac{1}{2}x + 1 - 1 + 3\right) \\ & \Longleftrightarrow & \cos x = \left(\dfrac{1}{4}x^2 - 2\times\dfrac{1}{2}x + 1\right) + 2 \\ & \Longleftrightarrow & \cos x = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2 + 2 \end{array}$$

comme : $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 2 \geq 2$, *d'où* $\cos x \geq 2$. *Nous obtenons une contradiction car* $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Conclusion :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad 4\cos x \neq x^2 - 4x + 12$$

Exemple 43 *Montrer que :* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. *Donc*

$$\exists\,(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad et \qquad p \wedge q = 1.$$

Alors $2 = \frac{p^2}{q^2}$, *donc* $2q^2 = p^2$. *Ceci signifie que* p^2 *est pair donc* p *est pair. Donc*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad p = 2k.$$

D'où $2q^2 = 4k^2$, *c'est-à-dire* $q^2 = 2k^2$.*Ceci signifie que* q^2 *est pair donc* q *est pair. Par suite* 2 *divise à la fois* p *et* q *, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse* $p \wedge q = 1$.

Conclusion :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Raisonnement par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E,\ P(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Exemple 44 *Montrer que l'assertion suivante est fausse :*

$$\text{"}\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x < 0\text{"}$$

On a $0 \in \mathbb{R}^-$ *et* $P(0)$ *est fausse* ($P(0):\ 0 < 0$). *Donc l'assertion* "$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x < 0$" *est fausse.*

Raisonnement par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0\}$.

Pour montrer une assertion de type " $\forall n \in I,\ P(n)$ " il suffit de montrer " $P(n_0)$ " et " $\forall n \in I,\ P(n) \implies P(n+1)$ " ,donc ce raisonnement se procède en trois étapes :

- On vérifie que $P(n_0)$ est varie.
- On se donne un $n \in I$ quelconque : on suppose $P(n)$ est vraie et on montre avec cette hypothèse que $P(n+1)$ est ausse vraie.
- on rappelle que par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout $n \in I$.

Exemple 45 *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \underbrace{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$$

- *Pour* $n = 1$ *on a :* $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ *, c'est-à-dire* $P(1)$ *est vraie.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

  On suppose que : $\underbrace{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$, *et on montre que :* $\underbrace{1 + 2 + ... + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{P(n+1)}$

  .

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + (n+1) &= 1 + 2 + ... + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

- *D'après le principe de récurrence* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 46 *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{3^n \geq 1 + 2n}_{P(n)}$$

- *Pour* $n = 0$ *on a :* $3^0 \geq 1 + 2 \times 0$ *, c'est-à-dire* $P(0)$ *est vraie.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que :* $\underbrace{3^n \geq 1 + 2n}_{P(n)}$, *et on montre que :* $\underbrace{3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)}_{P(n+1)}$.

  On a : $3^n \geq 1 + 2n$, *donc* $3^{n+1} \geq 3(1 + 2n)$. *C'est-à-dire :* $3^{n+1} \geq 3 + 6n$, *et comme* $3 + 6n \geq 1 + 2(n+1)$ *alors :*

$$3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1).$$

■ *D'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1) \ .$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**