# Série d'exercices sur les suites numériques

**Exercice 1** .

*Calculer en fonction de n le terme général de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans chacun des cas suivants* :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k - 5^{2k}}{\pi^{k+1}} \qquad et \qquad u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^k.\pi^{3-k}$$

**Exercice 2** *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* :

$$u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}\ ,\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Calculer* $u_1$ *et* $u_2$.
2. *Montrer que* : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n < 4$.
3. *Étudier le monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
4. *On considère la suite numérique* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* :

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}\quad ,pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

   **a)** *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique, on déterminera son raison.*

   **b)** *Exprimer* $v_n$ *puis* $u_n$ *en fonction de* $n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k+1}$.

   *Déterminer l'expression de* $S_n$ *en fonction de* $n$.

**Exercice 3** *On considère les suites numériques* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* :

$$u_0 = 2,\quad u_1 = \frac{4}{9} \quad et \quad u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - u_n\right) \qquad et\ \ v_n = u_n - \frac{1}{3^n},\quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que* :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

2. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique, puis exprimer* $u_n$ *en fonction de* $n$.
3. *Exprimer en fonction de* $n$ *la somme* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**Exercice 4** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = 2u_{n+1} + n + 1, \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Calculer* $u_1$ *et* $u_2$.
2. *Montrer par récurrence que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)$$
3. *Montrer par récurrence que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$
4. *En déduire que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - n - 2$$

**Exercice 5** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1. *Calculer* $u_1$ *et* $u_2$.
2. *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}, \quad \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$
4. *En déduire que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

**FIN**

Pr : **Yahya MATIOUI**