Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices N1 sur la dérivation

Exercice 1 .

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$.
2. *Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ et interpréter géométriquement le résultat.*

Exercice 2 .

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a.

1. *Montrer que :*
$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a.f(x) - x.f(a)}{x-a} = a.f'(a) - f(a)$$
2. *Déduire la valeur de la limite suivante :*
$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{a.x^{2019} - x.a^{2019}}{x-a}$$

Exercice 3 .

1. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et dérivables en un point x_0 de I tels que : $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$.*
Montrer que :
$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$
2. *Calculer les limites suivantes :*
$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^3 \cos(x-1) - 1}{x^3 - \sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(2x+1)^{20} - 1}{x^{10} - 1} \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{2x}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2x)}$$

Exercice 4 .

On considère la fonction : $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 5$.

1. *Ecrire l'équation de la tangente (T_a) à (C_f) au point d'abscisse a où $a \in \mathbb{R}$.*
2. *En quels points de (C_f) cette tangente passe par l'origine ?*

3. *Exsite-il-une tangente à (C_f) passant par le point $A\,(1,-1)$?*

Exercice 5 .

On considère la fonction f définie par :

$$f\,(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \qquad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1. *Déterminer a et b pour que la droite (D) d'équation : $y = 4x + 3$ soit tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$.*

2. *On prend dans cette question : $a = 4$ et $b = 3$.*

   a) *Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f\,(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f\,(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.*

   b) *En déduire les extremums de f, préciser la nature de chacun.*

   c) *Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la tangente (D).*

Exercice 6 .

On considère la fonction f définie par :

$$f\,(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

1. **a)** *Montrer que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}), \quad f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

   b) *Montrer qu'il existe une tangente et une seule à (C_f) parallèle à la droite (D) d'équation : $y = x + 4$, puis écrire l'équation de cette tangente.*

2. *Calculer les limites de f aux bornes de D_f, puis dresser son tableau de variations.*

3. *Déterminer les extremums de f en précisant la nature de chacun.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude-generale.com