Série d'exercices sur le produit scalaire

Exercice 1 *Soit* $ABCD$ *un parallélogramme de centre* I*, tel que :* $AC = 10$, $BI = 2\sqrt{3}$ *et* $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{6}$.

1. **a)** *Calculer :* $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.
   b) *Déduire que :* $AB = \sqrt{7}$.
2. *Montrer que :* $BA^2 + BC^2 = 74$, *puis déduire que :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$.
3. *On considère le point* E *tel que :* $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$.
   Montrer que : $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{8}(AC^2 - 5\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$, *puis déduire que les droites* (AC) *et* (IE) *sont perpendiculaires.*

Exercice 2 ABC *est un triangle isocèle en* A *tel que :* $\cos\widehat{A} = \frac{3}{4}$ *et* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.

1. *Montrer que :* $AB = 2\sqrt{2}$ *et* $BC = 2$.
2. *Soit* I *le milieu de* $[AB]$ *et le point* F *tel que :* $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{BC}$.
   a) *Calculer* $\overrightarrow{AF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
   b) *Montrer que le triangle* AIF *est droit en* I.
3. *Montrer que :* $IF = \sqrt{14}$.
4. *Montrer en utilisant le théorème de la médiane, que :* $BF = 4$.

Exercice 3 $ABCD$ *est un carré tel que :* $AB = 1$. E *et* F *deux points tels que :* $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

1. *Montrer que :* $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = 1$.
2. *Montrer que les droites* (AE) *et* (DF) *sont orthogonales.*
3. **a)** *Calculer* $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$.
   b) *Calculer chacune des distances* AE *et* AF.
   c) *Déduire :* $\cos(\widehat{EAF})$.
4. *Calculer la distance* EF.

Exercice 4 ABC *est un triangle tel que :* $AB = a$, $AC = 3a$, $\cos\widehat{A} = \frac{2}{3}$ *et* O *milieu de* $[BC]$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

1. *Calculer :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. *En déduire que :* $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -a^2$ *et que :* $BC = a\sqrt{6}$.

3. *Calculer :* AO.

4. *Soit* E *un point tel que :* $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{9}\overrightarrow{CA}$.

   a) *Montrer que :* $9\overrightarrow{AE} = 9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

   b) *Montrer que le triangle* ACE *est rectangle en* A.

Exercice 5 *Soient* A *et* B *deux points du plan tels que :* $AB = 6$.

1. *Montrer que pour tout point* M *du plan,* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ *tel que* I *est le milieu du segment* $[AB]$.

2. *En déduire l'ensemble des points* M *du plan dans les cas suivants :*
   $E_1 = \left\{M \in (P)/\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9\right\}$, $E_2 = \left\{M \in (P)/\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7\right\}$,
   $E_3 = \left\{M \in (P)/\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -12\right\}$ *et* $E_4 = \left\{M \in (P)/\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\right\}$.

Exercice 6 ABC *est un triangle équilatéral tel que :* $AB = a$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ *et* I *est le milieu de* $[BC]$ *et* O *est le milieu de* $[AI]$.

1. *Calculer en fonction de* a *le produit scalaire* $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{OC}$ *et la distance* AI.

2. *Démontrer que pour tout point* M *du plan* (P) *on a :* $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MO^2 + \frac{5}{4}a^2$.

3. *Déduire l'ensemble des points* M *du plan dans le cas suivant :*

$$F = \left\{M \in (P)/\ 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2\right\}$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI