Matrices – correction des exercices

Exercice 1

- On ne peut faire de combinaisons linéaires que pour des matrices de même type, donc les opérations $2A + 3B\ et\ C - B$ ne sont pas possibles, seule la combinaison $2A - 3C$ est possible et on a :

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -2 \\ 6 & -4 & 10 \end{bmatrix} ; 3C = \begin{bmatrix} 0 & -15 & 6 \\ -12 & 9 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Et

$$2A - 3C = \begin{bmatrix} 2 & 15 & -2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 12 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

- Le produit de matrices n'est possible que s'il est de la forme $(n, p) \times (p, m)$,

AB est du type $(3,3) \times (3,2)$, produit possible et le résultat est de type $(3,2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -17 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

AC est du type $(3,3) \times (3,3)$, produit possible et le résultat est de type $(3,3)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 2 \\ -14 & 23 & 0 \\ -2 & -26 & 4 \end{bmatrix}$$

BC est de la forme $(3,2) \times (3,3)$, produit impossible.

B^2 est de la forme $(3,2) \times (3,2)$, produit impossible.

ABC est impossible puisque AB est du type $(3,2)$ et C est du type $(3,3)$.

CAB est possible puisque C est du type $(3,3)$ et AB est du type $(3,2)$:

$$CAB = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -17 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -56 & 99 \\ 24 & -60 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

a. Pour déterminer $M(f), M(g)\ et\ M(fog)$ il suffit de calculer les images de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$f(e_1) = f(1,0,0) = (-1,-2,0)$; $g(e_1) = g(1,0,0) = (1,0,2)$; $(fog)(e_1) = f(1,0,2) = (1,0,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,-1)$; $g(e_2) = g(0,1,0) = (-1,0,-1)$; $(fog)(e_2) = f(-1,0,-1) = (0,1,0)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,0)$; $g(e_3) = g(0,0,1) = (-1,-1,-1)$; $(fog)(e_3) = f(-1,-1,-1) = (0,0,1)$

D'où $A = M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = M(g) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; $C = M(fog) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. On vérifie facilement que $AB = I = C$, d'où, $A^{-1} = B\ et\ g^{-1} = f$ puisque la matrice de g^{-1} est $B^{-1} = A$.

Exercice 3

a. $E \neq \emptyset$ et on a

$$M(a,b) \in E \Leftrightarrow M(a,b) = \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & b & a \\ -b & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a,b) = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En posant $N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a

$$M(a,b) \in E \Leftrightarrow M(a,b) = aN_1 + bN_2$$

Donc, tout élément de E s'écrit de manière unique sous forme de sous-espace vectoriel et que $\{N_1, N_2\}$ est une base.

b.

- $\forall A = M(a,b) \in E, \forall A' = M(a',b') \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$A + A' = M(a,b) + M(a',b') = \begin{bmatrix} a+a' & 0 & -a-a' \\ 0 & b+b' & a+a' \\ -b-b' & 0 & b+b' \end{bmatrix} = M(a+a', b+b')$$

Et $\qquad \lambda A = \lambda M(a,b) = M(\lambda a, \lambda b)$

D'où $\qquad f(A + A') = f[M(a+a', b+b')] = M(a+a'+b+b', a+a'+b+b')$

$$= M(a+b, a+b) + M(a'+b', a'+b')$$

$$= f(A) + f(A')$$

Et $\qquad f(\lambda A) = f[M(\lambda a, \lambda b)] = M(\lambda a + \lambda b, \lambda a + \lambda b)$

$$= \lambda M(a+b, a+b)$$

$$= \lambda f[M(a,b)]$$

$$= \lambda f(A)$$

Donc f est linéaire.

- $A = M(a,b) \in kerE \Leftrightarrow f[M(a,b)] = 0$

$$\Leftrightarrow M(a+b, a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+b & 0 & -a-b \\ 0 & a+b & a+b \\ -a-b & 0 & a+b \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -b$$

$$\Leftrightarrow A = M(a, -a) = aM(1, -1)$$

$Kerf$ est donc l'espace vectoriel engendré par $M(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- Pour avoir la matrice associée à f, quand E est muni de la base $\mathcal{B} = \{N_1, N_2\}$ il suffit de déterminer les composantes de $f(N_1)$ et de $f(N_2)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$f(N_1) = f[M(1,0)] = M(1,1) = N_1 + N_2$$

$$f(N_2) = f[M(0,1)] = M(1,1) = N_1 + N_2$$

Donc, la matrice associée à f est donnée par $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 4

Rappelons que la matrice de passage d'une base E à une base E' est obtenue en écrivant en colonne les composantes des vecteurs de la base E dans la base E'.

a.

- Appelons P_{12} la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. On a

$$(-4,1) = \lambda_1(-2,5) + \lambda_2(1,2) \Longrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = -4 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -2$$

$$(5,1) = \lambda_1(-2,5) + \lambda_2(1,2) \Longrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = -1\,, \lambda_2 = 3$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Appelons P_{23} la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_3$. On a

$$(-2,5) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$$

$$(1,2) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

D'où
$$P_{23} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Appelons P_{13} la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_3$. On a

$$(-4,1) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -4 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = -2\,, \lambda_2 = -1$$

$$(5,1) = \lambda_1(1,-1) + \lambda_2(2,1) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

D'où
$$P_{13} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Si X' et X'' sont les composantes de X respectivement dans la base $\mathcal{B}_2$ et la base $\mathcal{B}_3$, alors on a

$$X' = P_{12}X \Longrightarrow X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X'' = P_{13}X \Longrightarrow X'' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

FIN