Espaces vectoriels - correction des exercices

Exercice 1

- $E \subset \mathbb{R}^3, E \neq \emptyset$ car le vecteur $(0, 0, 0) \in E$, mais E n'est pas stable pour l'addition, en effet, si on prend par exemple $X = (1, 1, 1)$ *et* $Y = (1, 0, 0)$, on a bien $X \in E$ *et* $Y \in E$ mais $X + Y = (2, 1, 1) \notin E$, donc E n'est pas un sous-espace vectoriel.

- $F \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en effet

  $0 \in F, donc\ F \neq \emptyset$

  Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in F et\ y = (y_1, y_2, y_3) \in F$ on a

  $$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\ et\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 = 0$$

  Vérifions que $x + y \in F$. On a

  $$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

  Et $2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) = (2x_1 - x_2 + 3x_3) + (2y_1 - y_2 + 3y_3) = 0$

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F, \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)\ et$

  $$2\lambda x_1 - \lambda x_2 + 3\lambda x_3 = \lambda(2x_1 - x_2 + 3x_3) = 0 \Longrightarrow \lambda x \in F.$$

- $G \subset C[(a, b)]$ est un sous-espace vectoriel de $C[(a, b)]$, en effet

  La fonction nulle $\in G$ donc $G \neq \emptyset$

  Si $f \in G$ et $\mathrm{g} \in G$, on a $(f + \mathrm{g})(\mathrm{a}) = f(\mathrm{a}) + \mathrm{g}(\mathrm{a}) = 0\ donc\ f + \mathrm{g} \in G$

Exercice 2

- Appelons V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1\ et\ v_2$.

  Soit $X = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors

$$X \in V \Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 - \lambda_2 \\ y = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ z = -\lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - y = 3z$$

Donc les composantes (x,y,z) de tous les vecteurs de V vérifient $x - y + 3z = 0$

D'où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 0\}$

- Appelons W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs w_1, w_2 *et* w_3. Soit $X = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors

$$X \in W \Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (6\lambda_1 + \lambda_2, 4\lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ z = 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - y = 3z$$

Donc $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 0\}$

Remarquer que $V = W$ et que ceci est dù, en partie, au fait que w_1, w_2 *et* w_3 sont eux même des vecteurs de V ; on peut l'établir soit en remarquant que les composantes de w_1, w_2 *et* w_3 vérifient la condition $x - y - 3z = 0$, soit en remarquant que

$$w_1 = 4v_1 - 2v_2 \; ; \; w_2 = 2v_1 + v_2 \; et \; w_3 = v_1 + v_2.$$

Exercice 3

a.

$$X = (x,y,z) \in E \Leftrightarrow 2x - y + 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 3z$$

$$\Leftrightarrow X = (x, 2x + 3z, z)$$

$$\Leftrightarrow X = (x, 2x, 0) + (0, 3z, z)$$

$$\Leftrightarrow X = x(1,2,0) + z(0,3,1)$$

Donc tout vecteur de E s'écrit sous forme de combinaison linéaire de $v_1 = (1,2,0)$ *et* $v_2 = (0,3,1)$, $\{v_1, v_2\}$ est alors une famille génératrice de E.

Donc tout vecteur de F s'écrit sous forme de combinaison linéaire de $w_1 = (1,0,0)$ *et* $w_2 = (0,1,1)$, $\{w_1, w_2\}$ est alors une famille génératrice de F.

b. Déterminons d'abord les éléments de $E \cap F$:

$$X = (x,y,z) \in E \cap F \Leftrightarrow 2x - y + 3z = 0 \text{ et } y = z$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2z = 0 \text{ et } y = z$$

$$\Leftrightarrow x = -z = -y$$

$$\Leftrightarrow X = (-z,z,z) = z(-1,1,1)$$

$E \cap F$ est donc le sous-espace vectoriel de E et de F engendré par $(-1,1,1)$.

Exercice 4

Il est clair que si tous les a_i sont nuls alors $E = \mathbb{R}^n$.

Supposons que les a_i ne sont pas tous nuls, par exemple $a_1 \neq 0$, nous allons écrire les éléments de E sous forme de combinaisons linéaires, ce qui montrera que E est un sous-espace vectoriel

$$X \in E \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n$$

$$\Leftrightarrow X = \left(-\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n, x_2, \dots, x_n\right)$$

$$\Leftrightarrow X = x_2\left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \dots, 0\right) + x_3\left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, 0, \dots, 0\right) + \cdots + x_n\left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \dots, 1\right)$$

En posant

$$v_2 = \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \dots, 0\right) ;\ v_3 = \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, 0, \dots, 0\right); \dots;\ v_n = \left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \dots, 1\right)$$

On a $\qquad X = x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_nv_n$

E est donc le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$

Exercice 6

a.

- On a vu que dans un espace-vectoriel de dimension n, plus de n vecteurs sont nécessairement liés. La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est donc liée puisqu'elle contient 5 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4.

  Les vecteurs v_1 et v_5 sont proportionnels, $v_5 = 2v_1$, la famille $\{v_1, v_5\}$ est donc liée.

  La famille $\{v_1, v_2, v_5\}$ est liée puisqu'elle contient deux vecteurs liés, v_1 et v_5.

- Pour vérifier si une famille est libre ou liée, on écrit une combinaison linéaire nulle et on regarde si tous les coefficients sont nuls.

$$-\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_3, -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 4\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ne sont pas nécessairement tous nuls, pour $\lambda_3 = 1$, par exemple, on obtient la relation : $-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$, donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.

$$-\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_4 = 0 \Longrightarrow (2\lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -2\lambda_2 \ (1^{\text{ère}} équation) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \ (3^{\text{éme}} équation) \end{cases}$$

Et en remplaçant dans la $2^{\text{ème}}$ ou la $3^{\text{éme}}$ équation on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$-\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_4 + \lambda_4 v_5 = 0$$

$$\Longrightarrow (2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4, -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 4\lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 + 8\lambda_4) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 + 8\lambda_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -2(\lambda_2 + \lambda_4)(1^{\text{ère}} équation) \\ \lambda_1 = \lambda_2 (3^{\text{éme}} équation) \\ \lambda_3 = 8(\lambda_2 + \lambda_4)(4^{\text{éme}} et\ 3^{\text{éme}} équations) \\ \lambda_3 = 4(\lambda_2 + \lambda_4)(2^{\text{ème}}\ et\ 3^{\text{éme}} équations) \end{cases}$$

On obtient $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4 = 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_4$ et $\lambda_3 = 0. \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ et\ \lambda_4$ ne sont pas nécessairement tous nuls, pour $\lambda_1 = 1$, par exemple, on obtient la relation : $v_2 + v_3 - v_5 = 0$, donc la famille $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est liée.

b.

$$-\lambda_1(w_1 + w_2) + \lambda_2(w_1 + w_3) + \lambda_3(w_2 + w_3) = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)w_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)w_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)w_3 = 0$$

La famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ étant libre, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille $\{(w_1 + w_2), (w_1 + w_3), (w_2 + w_3)\}$ est aussi libre.

$$-\lambda_1(w_1 + w_2) + \lambda_2(w_1 - w_3) + \lambda_3(w_2 + w_3) = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)w_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)w_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)w_3 = 0$$

La famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ étant libre, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

En prenant $\lambda_1 = -1$, par exemple, on obtient :

$$-(w_1 + w_2) + (w_1 - w_3) + (w_2 + w_3) = 0$$

La famille $\{(w_1 + w_2), (w_1 - w_3), (w_2 + w_3)\}$ est donc liée.

c.

p_1, p_2 *et* p_3 sont des éléments de l'espace vectoriel $P_3(\mathbb{R})$, on raisonne de la même manière que précédemment :

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1(x^3 - 1) + \lambda_2(x^3 - 2x + k) + \lambda_3(x + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)x^3 + (\lambda_3 - 2\lambda_2)x - \lambda_1 + k\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

La famille $\{x^3, x^2, x, 1\}$ étant la base canonique de $P_3(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 - 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + k\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant λ_1 par $-\lambda_2$ et λ_3 par $2\lambda_2$ dans la $3^{éme}$ équation on obtient

$(k + 3)\lambda_2 = 0$, donc, si $k \neq -3$ la famille est libre et si $k = -3$ elle est liée ; par exemple, en prenant $\lambda_2 = 1$ on obtient la relation : $-(x^3 - 1) + (x^3 - 2x - 3) + 2(x + 1) = 0$.

Exercice 7

Dans ce genre de question, il suffit de montrer que tout vecteur de $P_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous forme de combinaison linéaire de q_0, q_1, q_2.

Soit $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ un élément de $P_2(\mathbb{R})$, on a

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_2(x-1)^2 + b_1(x-1) + b_0$$
$$= b_2(x^2 - 2x + 1) + b_1x - b_1 + b_0$$
$$= b_2x^2 + (b_1 - 2b_2)x + b_0 - b_1 + b_2$$

Or, le polynôme $P(x)$ s'écrit de manière unique dans la base canonique $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$, d'où

$$\begin{cases} b_2 = a_2 \\ b_1 - 2b_2 = a_1 \\ b_0 - b_1 + b_2 = a_0 \end{cases}$$

Et l'unique solution est $b_0 = a_0 + a_1 + a_2$; $b_1 = a_1 + 2a_2$; $b_2 = a_2$; donc tout polynôme $P(x)$ de $P_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique :

$P(x) = a_2q_2(x) + (a_1 + 2a_2)q_1(x) + (a_0 + a_1 + a_2)q_0(x)$

Ce qui exprime que $\{q_0, q_1, q_2\}$ est une base de $P_2(\mathbb{R})$.

Par exemple, le polynôme $P(x) = 2x^2 + 3x - 8$ s'écrit dans la base $\{q_0, q_1, q_2\}$:

$$P(x) = 2(x-1)^2 + 7(x-1) - 3.$$

Exercice 8

a.

Pour chercher une base d'un espace vectoriel, il faut trouver une famille libre et génératrice, mais, souvent, il suffit de montrer que tout élément de cet espace s'écrit de manière unique sous forme de combinaison linéaire.

$$X = (x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow x = 3y - 2z + t \Leftrightarrow X = (3y - 2z + t, y, z, t)$$
$$\Leftrightarrow X = y(3, 1, 0, 0) + z(-2, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$$

Donc, tout vecteur X de E s'écrit de manière unique sous forme de combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (3, 1, 0, 0);\ v_2 = (-2, 0, 1, 0)\ et\ v_3 = (1, 0, 0, 1)$, la famille de $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une de E.

b.

On vient de trouver une base de E comportant 3 éléments, donc $DimE = 3$ et pour montrer que B_2 est une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre (ou génératrice, ce qui est plus long !)

$$\lambda_1(1, 1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 1, 2, 0) + \lambda_3(-3, -1, 1, 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille B_2 est donc une base de E.

c.

Dans la base B_1, le vecteur $v = (2, -2, -3, 2)$ s'écrit

$$(2, -2, -3, 2) = \lambda_1(3, 1, 0, 0) + \lambda_2(-2, 0, 1, 0) + \lambda_3(1, 0, 0, 1)$$

$$= (3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

D'où

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

C'est-à-dire, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$, donc

$$v = -2(3, 1, 0, 0) - 3(-2, 0, 1, 0) + 2(1, 0, 0, 1)$$

Et les composantes de v dans la base B_1 sont $(-2, -3, 2)$.

Dans la base B_2, le vecteur $v = (2, -2, -3, 2)$ s'écrit

$$(2, -2, -3, 2) = \lambda_1(1, 1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 1, 2, 0) + \lambda_3(-3, -1, 1, 2)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_3)$$

D'où

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = -3 \\ 2\lambda_3 = 2 \end{cases}$$

C'est-à-dire, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 1$, donc

$$v = 2(1, 1, 1, 0) - 3(-1, 1, 2, 0) + (-3, -1, 1, 2)$$

Et les composantes de v dans la base B_2 sont $(2, -3, 1)$.