

Correction de la série d'exercices

Exercice 1 .

■

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{3^k - 5^{2k}}{\pi^{k+1}} &= \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{\pi^{k+1}} - \sum_{k=0}^n \frac{5^{2k}}{\pi^{k+1}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{\pi}\right)^k - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(5^2)^k}{\pi^k} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{\pi}\right)^k - \sum_{k=0}^n \left(\frac{5^2}{\pi}\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{\pi}} - \left(\frac{5^2}{\pi}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{5^2}{\pi}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5^2}{\pi}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}\right)}{\pi - 3} - \frac{\pi \left(1 - \left(\frac{5^2}{\pi}\right)^{n+1}\right)}{\pi - 5^2} \right) \\ &= \frac{1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}}{\pi - 3} - \frac{1 - \left(\frac{5^2}{\pi}\right)^{n+1}}{\pi - 5^2}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n 2^k \cdot \pi^{3-k} &= \prod_{k=1}^n \pi^3 2^k \times \frac{1}{\pi^k} \\ &= \prod_{k=1}^n \pi^3 \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^k \\ &= (\pi^3)^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^k \\ &= \pi^{3n} \left(\left(\frac{2}{\pi}\right) \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \times \dots \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \right) \\ &= \pi^{3n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1+2+\dots+n} \\ &= \pi^{3n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 2 On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On a : $u_1 = \frac{5u_0+4}{u_0+2} = \frac{0+4}{0+2} = 2$ et $u_2 = \frac{5u_1+4}{u_1+2} = \frac{5 \times 2 + 4}{2+2} = \frac{7}{2}$.

2. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n < 4$.

■ Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ donc : $0 \leq u_0 < 4$. L'encadrement est vrai.

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $0 \leq u_n < 4$ et on montre que : $0 \leq u_{n+1} < 4$.

Comme $0 \leq u_n < 4$, alors : $\frac{5u_n+4}{u_n+2} \geq 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 0$. (1)

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 4 &= \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4 \\ &= \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n - 4}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Comme $0 \leq u_n < 4$, alors : $\frac{u_n-4}{u_n+2} < 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} < 4$. (2)

D'après (1) et (2), on conclut que : $0 \leq u_{n+1} < 4$.

■ D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n < 4$$

3. Le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{5u_n + 4 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{u_n + 2} \\ &= \frac{-(u_n + 1)(u_n - 4)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Comme $0 \leq u_n < 4$ alors $\frac{-(u_n+1)(u_n-4)}{u_n+2} > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Ceci signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n-4}{u_n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} \\
 &= \frac{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4}{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} + 1} \\
 &= \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{u_n + 2} \\
 &= \frac{5u_n + 4 + u_n + 2}{u_n + 2} \\
 &= \frac{5u_n + 4 - 4u_n - 8}{5u_n + 4 + u_n + 2} \\
 &= \frac{u_n - 4}{6(u_n + 1)} \\
 &= \frac{1}{6}v_n
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$$

Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 1} = -4$.

b) On sait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = -4$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

d'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \frac{-4}{6^n}$$

■ L'expression de u_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{u_n - 4}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 4, \quad (u_n + 1 \neq 0) \\
 \iff v_n u_n + v_n &= u_n - 4 \\
 \iff u_n(v_n - 1) &= -v_n - 4 \\
 \iff u_n &= \frac{v_n + 4}{1 - v_n} \\
 \iff u_n &= \frac{\left(\frac{-4}{6^n}\right) + 4}{1 - \left(\frac{-4}{6^n}\right)} = \frac{\frac{-4 + 6^n \times 4}{6^n}}{\frac{6^n + 4}{6^n}} = \frac{4(-1 + 6^n)}{6^n + 4}
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \frac{4(6^n - 1)}{6^n + 4}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k + 1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\frac{4(6^k-1)}{6^k+4} + 1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\frac{4(6^k-1)+6^k+4}{6^k+4}} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{6^k + 4}{4(6^k - 1) + 6^k + 4} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{6^k + 4}{5 \times 6^k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{5} + \frac{4}{5 \times 6^k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{5} + \sum_{k=0}^n \frac{4}{5 \times 6^k} \\
 &= \frac{1}{5}(n+1) + \frac{4}{5} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{6}\right)^k \\
 &= \frac{1}{5}(n+1) + \frac{4}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{6}} \\
 &= \frac{1}{5}(n+1) + \frac{24}{25} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = \frac{1}{5}(n+1) + \frac{24}{25} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)$$

Exercice 3 On considère les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$$

1. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$.

■ Pour $n = 0$, on a : $u_1 = \frac{4}{9}$ et $\frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$, donc : $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^2}$ l'égalité est vraie.

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ et on montre que : $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= \frac{1}{27} (12u_{n+1} - u_n) \\
 &= \frac{1}{27} \left(12 \left(\frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \right) - u_n \right) \\
 &= \frac{1}{27} \left(\frac{12}{9}u_n + \frac{24}{3^{n+2}} - u_n \right) \\
 &= \frac{1}{27} \left(\frac{3}{9}u_n + \frac{24}{3^{n+2}} \right) \\
 &= \frac{1}{81}u_n + \frac{8}{3^{n+4}} \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \right) + \frac{6}{3^{n+4}} \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \right) + \frac{2}{3^{n+3}} \\
 &= \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}
 \end{aligned}$$

■ D'après le principe de récurrence on en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

2. Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}} \\
 &= \frac{1}{9} \left(u_n - \frac{1}{3^n} \right) \\
 &= \frac{1}{9}v_n
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$$

Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $\frac{1}{9}$ et le premier terme $v_0 = 1$.

■ L'expression de u_n en fonction de n .

On sait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique sa raison $q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

d'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \frac{1}{9^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \iff u_n = v_n + \frac{1}{3^n} \iff u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}.$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{9^k} + \frac{1}{3^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{9^k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{9}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} \times \frac{1}{9^{n+1}} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{21}{8} - \frac{1}{8 \times 9^n} - \frac{1}{2 \times 3^n} \\ &= \frac{1}{8} \left(21 - \frac{1}{9^n}\right) - \frac{1}{2 \times 3^n} \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = \frac{1}{8} \left(21 - \frac{1}{9^n}\right) - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \end{cases}$$

1. On a : $u_1 = 2 + 1 = 3$ et $u_2 = 2u_1 + 1 + 1 = 6 + 1 + 1 = 8$.

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right)$.

■ Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 3$ et $2^1 \left(1 + \sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} \right) = 3$, donc : $u_1 = 2^1 \left(1 + \sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} \right)$
l'égalité est vraie.

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right)$ et on montre que : $u_{n+1} = 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \right)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + n + 1 \\ &= 2 \times 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right) + n + 1 \\ &= 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right) + n + 1 \\ &= 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) \\ &= 2^{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \right) \end{aligned}$$

■ Donc d'après le principe de récurrence on en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right)$$

3. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

■ Pour $n = 1$, on a : $\sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}$ et $2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$, donc l'égalité est vraie.

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ et on montre que : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
 &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
 &= 2 + \frac{1}{2^n} \left(-(n+2) + \frac{n+1}{2} \right) \\
 &= 2 + \frac{1}{2^n} \left(\frac{-2n-4+n+1}{2} \right) \\
 &= 2 + \frac{1}{2^n} \times \frac{-n-3}{2} \\
 &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

■ Donc d'après le principe de récurrence on en déduit que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

4. On déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 u_n &= 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \right) \quad (\text{question 2/}) \\
 &= 2^n \left(1 + 2 - \frac{n+2}{2^n} \right) \quad (\text{question 3/}) \\
 &= 2^n + 2^{n+1} - (n+2) \\
 &= 2^n (1+2) - (n+2) \\
 &= 2^n \times 3 - (n+2)
 \end{aligned}$$

Pour $n = 0$ on a : $2^0 \times 3 - (0+2) = 1$ et comme $u_0 = 1$. Alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 \times 2^n - n - 2$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1. On a : $u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1$ et $u_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. La monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. D'où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} &\geq \frac{1}{2p\sqrt{p}} \iff \frac{1}{\sqrt{p-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2p\sqrt{p}} \\ &\iff \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} \geq 1 + \frac{1}{2p} \\ &\iff \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} \geq \frac{(2p+1)}{2p} \\ &\iff 2p\sqrt{p} \geq \sqrt{p-1} \times (2p+1) \\ &\iff 4p^3 \geq (4p^2 + 4p + 1)(p-1) \\ &\iff 4p^3 \geq 4p^3 - 4p^2 + 4p^2 - 4p + p - 1 \\ &\iff 0 \geq -3p - 1 \\ &\iff -3p - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Comme : $-3p - 1 \leq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, alors

$$(\forall p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}), \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On a

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} \right)$$

comme

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} \right) &= \left(\frac{2}{\sqrt{1}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left(\frac{2}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ensuite

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} - 1 \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

par ailleurs

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

et comme : $3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 3 - \frac{2}{n}$ alors

$$u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

pour $n = 1$, on a : $3 - \frac{2}{1} = 1$ et $u_1 = 1$ donc $u_1 \leq 1$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 3 - \frac{2}{n} \quad (1)$$

D'autre part, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_1 \leq u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com