Correction du devoir surveillé N2

Exercice 1 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} a_0 = 1 \text{ et } a_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+2} = \frac{3a_{n+1}.a_n}{2a_{n+1}+a_n} \end{cases}$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

1. **a)** *Montrons que la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique :*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{3a_{n+1}.a_n}{2a_{n+1}+a_n}} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{2a_{n+1}+a_n}{3a_{n+1}.a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{2a_{n+1}+a_n}{3a_{n+1}.a_n} - \frac{3a_n}{3a_{n+1}.a_n} \\ &= \frac{2a_{n+1}-2a_n}{3a_{n+1}.a_n} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}.a_n} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \\ &= \frac{-2}{3} b_n \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad b_{n+1} = \frac{-2}{3} b_n$$

Ceci signifie que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{-2}{3}$ *. Son premier terme* $b_0 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

b) *La suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de premier terme* $b_0 = -\frac{1}{2}$ *et de raison* $q = \frac{-2}{3}$. *On sait que pour tout entier naturel* n,

$$b_n = b_0 \times q^n$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), b_n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$.

Calculons S_n par deux manières différentes.

Méthode : 01 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{-2}{3}$.
Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \\ &= b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} \\ &= b_0 \times \frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} \\ &= \frac{-3}{10} \times \left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Méthode : 02 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-2}{3}\right)^k \\ &= \frac{-1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{-1}{2} \times \frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{-3}{10}\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

■ *L'expression de a_n en fonction de n.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & \sum_{k=0}^{n-1} b_k \\ & = & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \\ & = & \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) + ... + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) \\ & = & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \\ & = & \frac{1}{a_n} - 1 \end{array}$$

Donc

$$S_n = \frac{1}{a_n} - 1$$

ensuite

$$\frac{1}{a_n} = S_n + 1$$

comme : $S_n = \frac{-3}{10}\left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors*

$$\frac{1}{a_n} = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^n \Longrightarrow a_n = \frac{10}{7 + 3\left(\frac{-2}{3}\right)^n}$$

pour $n = 0$, *on a* : $\frac{10}{7+3\left(\frac{-2}{3}\right)^0} = 1$ *et comme* $a_0 = 1$, *alors* :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \qquad a_n = \frac{10}{7 + 3\left(\frac{-2}{3}\right)^n}$$

Exercice 2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par* :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \ \text{ et } u_1 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 3 \end{cases}$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. **a)** *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) \\ & = & u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n \\ & = & u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\ & = & 2u_{n+1} - u_n - 3 - 2u_{n+1} + u_n \\ & = & -3 \end{array}$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad v_{n+1} - v_n = -3$$

Ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique de raison* -3 . *Son premier terme* $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

b) *La suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique de premier terme* $v_0 = 1$ *et de raison* $r = -3$. *On sait que pour tout entier naturel* n,

$$v_n = v_0 + nr$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; v_n = -3n + 1$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.

Calculons S_n *par deux manières différentes.*

Méthode : 01 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique de premier terme* $v_0 = 1$ *et de raison* $r = -3$. *Donc*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1} \\ &= \frac{n \times (1 - 3(n-1) + 1)}{2} \\ &= \frac{n(1 - 3n + 3 + 1)}{2} \\ &= \frac{n(-3n+5)}{2} \\ &= \frac{-3n^2 + 5n}{2} \end{aligned}$$

Méthode : 02 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-3k+1) \\ &= -3\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= \frac{-3n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{-3n^2+3n}{2} + n \\ &= \frac{-3n^2+5n}{2} \end{aligned}$$

- *L'expression de u_n en fonction n.*

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k) \\ &= (u_1-u_0)+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+...+(u_n-u_{n-1}) \\ &= u_n - u_0 \\ &= u_n - 2 \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = u_n - 2$$

ensuite

$$u_n = S_n + 2$$

comme : $S_n = \frac{-3n^2+5n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-3n^2+5n}{2} + 2 \\ &= \frac{-3n^2+5n+4}{2} \end{aligned}$$

pour $n = 0$, on a : $\frac{-3\times 0+5\times 0+4}{2}$ et comme $u_0 = 2$, alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \qquad u_n = \frac{-3n^2+5n+4}{2}$$

Exercice 3 .

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :*

$$u_0 = a \text{ et } \quad (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} \quad \text{où } a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$$

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < \frac{1}{4}$.

Pour $n = 0$, *on a :* $u_0 = a$ *et comme* $a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ *alors :* $0 < u_0 < \frac{1}{4}$. *L'encadrement est vrai.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $0 < u_n < \frac{1}{4}$ *et montrons que :* $0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} u_n \ \epsilon \left]0, \frac{1}{4}\right[&\iff 0 < u_n < \frac{1}{4} \\ &\iff 0 < u_n^2 < \frac{1}{16} \\ &\iff -\frac{1}{8} < -2u_n^2 < 0 \\ &\iff \frac{7}{8} < 1 - 2u_n^2 < 1 \\ &\iff 1 < \frac{1}{1-2u_n^2} < \frac{8}{7} \end{aligned}$$

et comme : $0 < u_n^2 < \frac{1}{16}$, *alors :*

$$0 \times 1 < u_n^2 \times \frac{1}{1-2u_n^2} < \frac{8}{7} \times \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$$

donc

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$$

Donc d'après le principe de récurrence on conclut que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < \frac{1}{4}$$

2. *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} - u_n \\ &= u_n\left(\frac{u_n}{1-2u_n^2} - 1\right) \\ &= u_n\left(\frac{2u_n^2 + u_n - 1}{1-2u_n^2}\right) \\ &= \frac{u_n(u_n+1)(2u_n-1)}{1-2u_n^2} \end{aligned}$$

Puisque $0 < u_n < \frac{1}{4}$ *alors* $\frac{u_n(u_n+1)(2u_n-1)}{1-2u_n^2} < 0$ *et donc* $u_{n+1} - u_n < 0$. *Ceci signifie que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

3. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} < \frac{2}{7}u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Étudions le signe de : $u_{n+1} - \frac{2}{7}u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{7}u_n &= \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} - \frac{2}{7}u_n \\ &= u_n\left(\frac{u_n}{1-2u_n^2} - \frac{2}{7}\right) \\ &= \frac{u_n\left(7u_n - 2 + 4u_n^2\right)}{7\left(1-2u_n^2\right)} \\ &= \frac{u_n\left(u_n+2\right)\left(4u_n-1\right)}{7\left(1-2u_n^2\right)} \end{aligned}$$

Puisque $0 < u_n < \frac{1}{4}$ *alors* $\frac{u_n(u_n+2)(4u_n-1)}{7(1-2u_n)} < 0$ *et donc* $u_{n+1} - \frac{2}{7}u_n < 0$.

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} < \frac{2}{7}u_n$$

4. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $u_{n+1} < \frac{2}{7}u_n$, *donc*

$$\begin{cases} u_1 < \frac{2}{7}u_0 \\ u_2 < \frac{2}{7}u_1 \\ u_3 < \frac{2}{7}u_2 \\ \vdots \\ u_n < \frac{2}{7}u_{n-1} \end{cases}$$

ensuite on fait le produit de ces inégalités, on obtient

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_n < \underbrace{\left(\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times ... \times \frac{2}{7}\right)}_{n\ fois} \times u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$$

d'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,, u_n < \left(\frac{2}{7}\right)^n a$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com