Correction du devoir surveillé N2

Exercice 1 .

■ *Calculons la dérivée de la fonction suivante :* $f : x \longmapsto \sin(\pi x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme la somme de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$.
$u : x \longmapsto \sin(\pi x)$ *et* $v : x \longmapsto 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Calculons $f'(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin(\pi x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' \\ &= (\sin(\pi x))' + \left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' \\ &= \pi\cos(\pi x) - 3 \times \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \pi\cos(\pi x) - \frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

■ *Calculons la valeur de la limite suivante :* $\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{\sin(\pi x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$.

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{\sin(\pi x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = f'(-1)$$

Calculons $f'(-1)$

$$f'(-1) = \pi\cos(-\pi) - \frac{3\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{\sin(\pi x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 .

On considère la fonction f *définie par :*

$$f(x) = (1-x)\sqrt{2x - x^2}$$

1. *Vérifions que :* $D_f = [0, 2]$.

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ 2x - x^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x(2-x) \geq 0\right\} \end{aligned}$$

le tableau de signe de l'expression : $x(2-x)$.

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
x	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ | $\quad$ $+$
$2-x$	$+$ $\quad$ | $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$x(2-x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

Donc

$$x(2-x) \geq 0 \iff x \in [0,2]$$

Ceci signifie que

$$D_f = [0,2]$$

2. **a)** *Montrons que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} (1-x) \frac{x\sqrt{\frac{2}{x}-1}}{x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} (1-x)\sqrt{\frac{2}{x}-1} = +\infty \end{aligned}$$

D'où on obtient

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

La fonction f n'est pas dérivable à droite de 0. *La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale vers le haut à droite de* 0.

b) *La dérivabilité de la fonction f à gauche de* 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{x-2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{(1-x)\sqrt{x}\sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x}^2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 2^-} -\frac{(1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} = -\frac{-1\times\sqrt{2}}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

La fonction f n'est pas dérivable à gauche de 2.
La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale vers le bas à gauche de 2.

3. *La dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle* $]0,2[$.

La fonction f s'écrit comme le produit de deux fonctions :

$$u : x \longmapsto 1-x \quad et \quad v : x \longmapsto \sqrt{2x-x^2}$$

- u *est une fonction polynôme dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et surtout sur* $]0,2[$.

  On pose : $w : x \longmapsto 2x - x^2$.
- w *est une fonction polynôme dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et surtout sur* $]0,2[$, *et pour tout* x *de* $]0,2[$: $w(x) \succ 0$. *Donc la fonction* $v = \sqrt{w}$ *est dérivable sur* $]0,2[$.

Donc la fonction f *est dérivable sur* $]0,2[$ *comme le produit de deux fonctions dérivables sur* $]0,2[$.

Calculons $f'(x)$ *pour tout* $x \in]0,2[$.

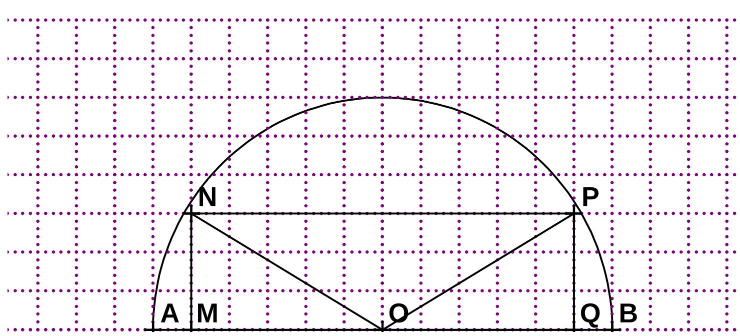
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left((1-x)\sqrt{2x-x^2}\right)' \\
&= (1-x)'\sqrt{2x-x^2} + (1-x)\left(\sqrt{2x-x^2}\right)' \\
&= -\sqrt{2x-x^2} + (1-x) \times \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \\
&= \frac{-\left(2x-x^2\right) + (1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} \\
&= \frac{-2x+x^2+1-2x+x^2}{\sqrt{2x-x^2}} \\
&= \frac{2x^2-4x+1}{\sqrt{2x-x^2}}
\end{aligned}
$$

4. *On a :* $\sqrt{2x-x^2} \succ 0$ *pour tout* x *de* $]0,2[$, *alors le signe de* $f'(x)$ *sur* $]0,2[$ *est celui de* $2x^2 - 4x + 1$.

   Donc

x	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	0

5.



Montrons que : $(\forall x \in]0,1[)\,,\ S(x) = 2f(x)$. *avec* $S(x)$ *la surface du rectangle* $MNPQ$.
La surface du rectangle $MNPQ$ *est :*

$$S(x) = MQ \times MN$$

- *On cherche* MQ.

$$MQ = AB - 2AM = 2 - 2x = 2(1-x) \qquad (1)$$

- *On cherche* MN.
  On a : $OQ = OM = \frac{MQ}{2} = 1 - x$, *et :* $OP = ON = \frac{AB}{2} = 1$.
  En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OQP *on obtient :*

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2 \iff PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$$

  et comme $2x - x^2 \succ 0$ *pour tout* x *de* $]0,1[$ *alors :*

$$OP = \sqrt{2x - x^2} \qquad (2)$$

On déduit d'après (1) *et* (2) *que :*

$$S(x) = 2(1-x)\sqrt{2x - x^2} = 2.f(x)$$

- *On cherche la position du point* M *pour la quelle la surface du rectangle* $MNPQ$ *est maximale.*
  La fonction S *est dérivable sur* $]0,1[$ *comme le produit de deux fonctions dérivables sur* $]0,1[$. $\left(u : x \longmapsto 1 - x \quad et \quad v : x \longmapsto \sqrt{2x - x^2}\right)$.
  Soit $x \in]0,1[$.

$$S'(x) = 2f'(x)$$

  D'après la question précédent on en déduit le tableau suivant :

x	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	$S\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	0

  on en déduit

$$(\forall x \in]0,1[)\,,\quad S(x) \leq S\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = 2.f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = 2$$

  Ceci signifie que la surface du rectangle $MNPQ$ *est maximale si :* $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com