Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Les ensembles

Ensembles

Vocabulaire et notations usuelles

Définition 1 *Un ensemble est une collection d'objets.*

On peut définir un ensemble de deux manières :

- *en* ***extension*** : *on donne la liste exhaustive des éléments qui y figurent, par exemple* $E = \{1, 2, 3\}$ *est l'ensemble contenant les trois éléments* 1, 2 *et* 3. *Il faut noter que pour écrire un ensemble, on utilise conventionnellement des accolades et pas des parenthèses. Dans ce cas, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance.*

- *en* **compréhension** : *on donne les propriétés que doivent posséder les éléments de l'ensemble. Par exemple, l'ensemble* E *des réels supérieurs ou égaux à* 1 *peut s'écrire* $E = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$.

Appartenance 2 *Quand un objet appartient à un ensemble, on dit que cet objet est élément de cet ensemble. Si* x *est élément d'un ensemble* E, *on écrit* $x \in E$.

Ensemble vide 3 *C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il se note* $\varnothing$, *ou aussi* $\{\}$ *mais ne se note pas* $\{\varnothing\}$.

Singletons, paires 4 *Un ensemble qui contient un et un seul élément s'appelle un singleton. Un ensemble qui contient deux éléments (distincts) s'appelle une paire. La paire* $\{a, b\}$ *est la paire* $\{b, a\}$.

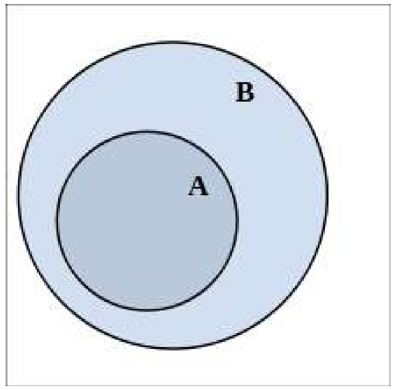
Sous-ensembles

Inclusion

Définition 5 $(Sous-ensembles)$

L'ensemble A *est un sous-ensemble de* B *si tous les éléments de* A *sont des éléments de* B *(autrement dit* $x \in A \implies x \in B$*). On dit aussi que* A *est inclus dans* B, *on le note*

$A \subset B$.



Remarque 6 *On peut dire aussi que A est une partie de B pour dire que A est un sous-ensemble de B.*

Exemple 7 Si $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ *et* $F = \{10, 2, 8\}$, *alors* : $F \subset E$.

Remarque 8 .

- *Pour tout ensemble A, on a : $\varnothing \subset A$, l'ensemble vide est une partie de A.*
- Si $A \subset B$ *et* $B \subset C$, *alors* $A \subset C$.
- $A \subset A$.

Egalité d'ensembles

Définition 9 $(Egalit\acute{e} - d'ensembles)$

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments, autrement dit si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemple 10 *On considère l'ensemble*

$$H = \left\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / \ mn + 2 - 3n = 7\right\}$$

Écrire l'ensemble H en extension.

- *Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.*

$$\begin{aligned}
(m, n) \in H &\iff mn + 2 - 3n = 7 \\
&\iff n(m-3) = 5 \\
&\iff \begin{cases} n = 5 \\ m - 3 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = -5 \\ m - 3 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = 1 \\ m - 3 = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = -1 \\ m - 3 = -5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} n = 5 \\ m = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = -5 \\ m = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = 1 \\ m = 8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = -1 \\ m = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$H = \{(4, 5) ; (2, -5) ; (8, 1) ; (-2, -1)\}$$

Exemple 11 *On considère l'ensemble*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \ \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

Écrire l'ensemble A en extension.

■ *Soit $x \in \mathbb{Z}$.*

$$\begin{aligned} x \quad \in \quad A &\iff \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \frac{2x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \frac{2x+1+1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow 1 + \frac{1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow 2x+1 \ \textit{divise } 1 \\ &\Longrightarrow 2x+1 = 1 \quad \textit{ou } 2x+1 = -1 \\ &\Longrightarrow x = 0 \quad \textit{ou } x = -1 \\ &\Longrightarrow x \in \{-1, 0\} \end{aligned}$$

donc

$$A \subset \{-1, 0\}$$

■ *Réciproquement,*

Si $x = 0$, alors $\frac{0+1}{2 \times 0+1} = 1 \in \mathbb{Z}$. Donc : $0 \in \mathbb{Z}$.

Si $x = -1$, alors $\frac{-1+1}{2 \times (-1)+1} = 0 \in \mathbb{Z}$. Donc : $-1 \in \mathbb{Z}$.

Ceci signifie que

$$A = \{-1, 0\}$$

Ensemble des parties

Définition 12 (*Ensemble des parties*)
Soit A un ensemble, l'ensemble des parties de A, noté $P(A)$, est l'ensemble des sous-ensembles de A.

Exemple 13 *Si $A = \{1, 2, 3\}$ alors $P(A) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}, \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\}$.*

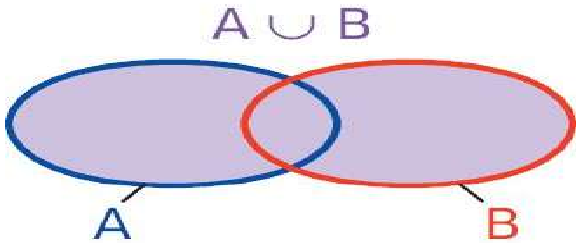
Opérations sur les ensembles

On présente ici des opérations sur les ensembles qui permettent de construire de nouveaux ensembles.

Union et Intersection

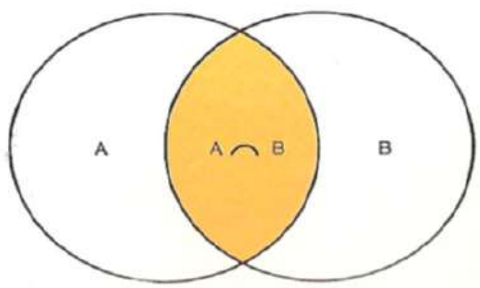
Définition 14 (*Union*).
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. L'union de A et de B est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ***ou*** *dans B. On le note $A \cup B$.*

$$A \cup B = \{x \in E / \ x \in A \quad ou \quad x \in B\}$$



Définition 15 (*Intersection*).
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. L'intersection des parties A et B est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ***et*** *dans B. On le note $A \cap B$.*

$$A \cap B = \{x \in E / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Exemple 16 *Si $A = \{2, 5, 7\}$ et $B = \{1, 5, 7, 9\}$, alors : $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ et $A \cap B = \{5, 7\}$.*

Exemple 17 *On considère les ensembles :*

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{4} / \ n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad et \qquad B = \left\{ \frac{5m+4}{3} / \ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que : $A \cap B \neq \varnothing$ et $B \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.

■ *On suppose par l'absurde que : $A \cap B = \varnothing$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que :*

$$\exists \, (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad x = \frac{2n+1}{4} = \frac{5m+4}{3}$$

donc

$$6n + 3 = 20m + 16 \implies 6n - 20m = 13 \implies 3n - 10m = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$$

ce qui est absurde car $3n - 10m \in \mathbb{Z}$. Donc

$$A \cap B = \varnothing$$

■ *On a* : $3 \in B$ *et* $3 \in \mathbb{N}$, *alors* : $B \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.

Exemple 18 *On considère les ensembles* :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \ |x-1| < \frac{3}{2} \right\} \qquad et \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{N} / \ \frac{2x+3}{2} \leq 4 \right\}$$

Déterminons en extension $A \cap B$ *et* $A \cup B$.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{Z} / \ |x-1| < \frac{3}{2} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z} / \ \frac{-3}{2} < \ x-1 < \frac{3}{2} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z} / \ \frac{-3}{2} + 1 < \ x < \frac{3}{2} + 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z} / \ \frac{-1}{2} < \ x < \frac{5}{2} \right\} \\ &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbb{N} / \ \frac{2x+3}{2} \leq 4 \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{N} / \ 2x+3 \leq 8 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{N} / \ 2x \leq 5 \} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{N} / \ x \leq \frac{5}{2} \right\} \\ &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Donc

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} \quad et \quad A \cap B = \{0, 1, 2\}$$

Règles de calculs

Propriété 19 *Soient* A, B *et* C *des parties d'un ensemble* E.

■ $A \cap B = B \cap A$.

■ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

■ $A \cap \varnothing = \varnothing$ *et* $A \cap A = A$.

■ $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$.

■ $A \subset B \iff A \cap B = A$.

■ $A \cup B = B \cup A$.

■ $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$.

■ $A \cup \varnothing = A$ *et* $A \cup A = A$.

■ $A \subset B \iff A \cup B = B$.

Démonstration 20 *Les démonstrations sont pour l'essentiel une reformulation des opérations logiques. On en démontre un exemple pour fournir un modèle de démonstration d'égalités ensemblistes.*

$$
\begin{aligned}
x \epsilon A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \text{ et } x \in (B \cap C) \\
&\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C \\
&\iff x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C \\
&\iff x \in (A \cap B) \cap C
\end{aligned}
$$

Propriété 21 (*Lois de Morgan*) .
Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

■ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

■ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration 22 .

■ *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrons que :* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démontrons par équivalence.

$$
\begin{aligned}
x \epsilon A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in (B \cup C) \\
&\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\
&\iff x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in (A \cap C) \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

■ *Même démarche pour l'autre égalité.*

On expose quelques exemples pour familiariser par les démonstrations ensemblistes

Exemple 23 *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.*
Montrer que :

$$
\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Longrightarrow B = C
$$

On suppose que : $A \cap B = A \cap C$ *et* $A \cup B = A \cup C$, *et on montre que :* $B = C$.
Soit $x \in B$, alors : $x \in A \cup B$ *donc :* $x \in A \cup C$ *c'est-à-dire* $x \in A$ *ou* $x \in C$.

■ Si $x \in C$, *ce qu'on veut.*

■ Si $x \notin C$, *alors* x *est nécessairement dans* A *d'où* $x \in A \cap B$ *ensuite :* $x \in A \cap C$ *donc* $x \in C$.

Dans tous les cas, on conclut que : $B \subset C$. (1)
Soit $x \in C$, *alors :* $x \in A \cup C$ *donc :* $x \in A \cup B$ *c'est-à-dire* $x \in A$ *ou* $x \in B$.

■ Si $x \in B$, *ce qu'on veut.*

■ Si $x \notin B$, *alors* x *est nécessairement dans* A *d'où* $x \in A \cap C$ *ensuite :* $x \in A \cap B$ *donc* $x \in B$.

Dans tous les cas, on conclut que : $C \subset B$. (2)
D'après (1) *et* (2) *on en déduit que :* $B = C$.

Exemple 24 *Soient* A, B *et* C *trois parties d'un ensemble* E.
Montrer que :

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B$$

Démontrons le double implications.

$\Longrightarrow$) *Évident.*

($\Longleftarrow$ *On suppose que :* $A \cap B = A \cup B$, *et on montre que :* $A = B$.

- ■ *Soit* $x \in A$, *alors :* $x \in A \cup B$, *donc :* $x \in A \cap B$ *c'est-à-dire :* $x \in B$. *Ceci signifie que :* $A \subset B$. (1)
- ■ *Soit* $x \in B$, *alors :* $x \in A \cup B$, *donc :* $x \in A \cap B$ *c'est-à-dire :* $x \in A$. *Ceci signifie que :* $B \subset A$. (2)

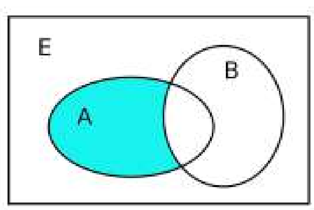
D'après (1) *et* (2) *on en déduit que :* $A = B$.

Différence de deux parties, Différence symétrique et complémentaires d'une partie

Différence de deux parties

Définition 25 *Soient* A *et* B *deux parties d'un ensemble* E. *La différence de* A *et* B, *notée* $A \setminus B$ *(on lit "*A *moins* B*") est l'ensemble des éléments de* E *qui appartiennent à* A *et n'appartiennent pas à* B. *On a donc :*

$$A \setminus B = \{x \in E / \ x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\}$$



Exemple 26 *Si* $A = \{2,5,7\}$ *et* $B = \{1,5,7,9\}$, *on a :* $A \setminus B = \{2\}$ *et* $B \setminus A = \{1,9\}$.

Pour tout ensemble A, on a $A \setminus \varnothing = A$. De plus, pour tous ensembles A et B, on a $A \subset B$ ssi $A \setminus B = \varnothing$.

Exemple 27 *Soient* A, B *et* C *trois parties d'un ensemble* E.

Montrer que :

$$\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus C = B \setminus C \end{cases} \Longrightarrow A \subset B$$

On suppose que : $A \cap C \subset B \cap C$ *et* $A \setminus C = B \setminus C$, *et on montre que :* $A \subset B$.

Soit $x \in A$.

- Si $x \in C$, *alors :* $x \in A \cap C$, *donc :* $x \in B \cap C$ *c'est-à-dire :* $x \in B$.
- Si $x \notin C$, *alors :* $x \in A \setminus C$, *donc :* $x \in B \setminus C$ *c'est-à-dire :* $x \in B$.

Dans tous les cas, on conclut que : $A \subset B$.

Complémentaire d'une partie

Définition 28 *Soit* A *une partie d'un ensemble* E. *Le complémentaire dans l'ensemble* E *de la partie* A, *noté* $\complement_E^A$ *ou aussi* $\overline{A}$, *est l'ensemble des éléments de* E *qui n'appartiennent pas à* A.

$$\begin{array}{rcl} \complement_E^A & = & \{x \in E / \ x \notin A\} \\ \forall x & \in & E, \ \left(x \in \complement_E^A \iff x \notin A\right) \end{array}$$

Exemple 29 .

- *Soit* $E = \{1,2,3,4,5\}$. *Soit* $A = \{2,3\}$. *On a* $\complement_E^A = \{1,4,5\}$.
- *Soit* $E = \mathbb{R}$. *Soit* $A = [0,1]$. *On a*

$$\complement_{\mathbb{R}}^A = \{x \in \mathbb{R} / \ x \notin [0,1]\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

Remarque 30 *Soient* E *un ensemble puis* A *et* B *deux parties de* E. $A \setminus B = A \cap \complement_E^B$.

Propriété 31 *Soit* E *un ensemble. Soient* A *et* B *des parties de* E. *On a alors :*

$$A \subset B \iff \complement_E^B \subset \complement_E^A$$

Démonstration 32 *Voir la série d'exercices.*

Propriété 33 (*Propriétés sur les complémentaires*)

Soient A, B *et* C *des parties d'un ensemble* E.

- $\complement_E\left(\complement_E^A\right) = A$.

■ $\complement_E^{(A\cap B)} = \complement_E^A \cup \complement_E^B$.

■ $\complement_E^{(A\cup B)} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$.

Démonstration 34 *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.*

■

$$\begin{aligned} x \in \complement_E\left(\complement_E^A\right) &\iff x \notin \complement_E^A \\ &\iff non\left(x \in \complement_E^A\right) \\ &\iff non\,(x \notin A) \\ &\iff non\,(non\,(x \in A)) \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} x \in \complement_E^{(A\cap B)} &\iff x \notin (A\cap B) \\ &\iff non\,(x \in A\cap B) \\ &\iff non\,(x \in A \ et\ x \in B) \\ &\iff non\,(x \in A) \ \text{ ou } non\,(x \in B) \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \complement_E^A \cup \complement_E^B \end{aligned}$$

Exemple 35 ■

$$\begin{aligned} x \in \complement_E^{(A\cup B)} &\iff x \notin (A\cup B) \\ &\iff non\,(x \in A\cup B) \\ &\iff non\,(x \in A \ ou\ x \in B) \\ &\iff non\,(x \in A) \ \ et\ non\,(x \in B) \\ &\iff x \notin A \ \ et\ x \notin B \\ &\iff x \in \complement_E^A \cap \complement_E^B \end{aligned}$$

□

Exemple 36 *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.*

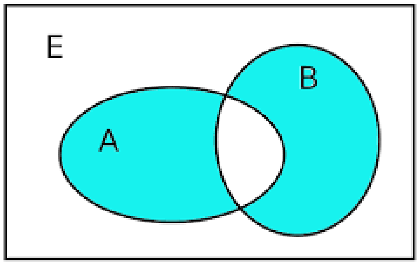
■ *Montrer que* : $A \setminus (B\cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

$$\begin{aligned} A \setminus\ (B\cap C) &= A \cap \complement_E^{(B\cap C)} \\ &= A \cap \left(\complement_E^B \cup \complement_E^C\right) \\ &= \left(A\cap \complement_E^B\right) \cup \left(A \cap \complement_E^C\right) \qquad (Loi\ de\ Morgan) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

Différence symétrique

Définition 37 *Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$ la partie de E :*

$$A\Delta B=(A\cup B)\ \setminus\ (A\cap B)$$



Propriété 38 *Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B,C)\in(P(E))^3$.*

- $A\Delta B=(A\ \setminus\ B)\cup(B\ \setminus\ A)$.
- $A\Delta B=B\Delta A$.
- $(A\Delta B)\,\Delta C=C\Delta\,(A\Delta B)$.
- $A\Delta\varnothing=A$.
- $(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C)$.

Démonstration 39 *Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B,C)\in(P(E))^3$.*

- *Montrons que* : $A\Delta B=(A\ \setminus\ B)\cup(B\ \setminus\ A)$.

$$\begin{array}{rcl}
A\Delta B & = & (A\cup B)\ \setminus\ (A\cap B)\\
& = & (A\cup B)\cap\ \overline{(A\cap B)}\\
& = & (A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\
& = & \left((A\cup B)\cap\overline{A}\right)\cup\left((A\cup B)\cap\overline{B}\right)\\
& = & \left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right)\cup\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{B}\right)\right)\\
& = & \left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\\
& = & (A\ \setminus\ B)\cup(B\ \setminus\ A)
\end{array}$$

- *Montrons que* : $A\Delta B=B\Delta A$.

$$A\Delta B=(A\ \setminus\ B)\cup(B\ \setminus\ A)=(B\ \setminus\ A)\cup(A\ \setminus\ B)=B\Delta A$$

■ *Montrons que* : $(A\Delta B)\,\Delta C = C\Delta\,(A\Delta B)$.

$$\begin{array}{rcl}(A\Delta B)\,\Delta C & = & ((A\Delta B)\ \setminus C)\cup(C\setminus A\Delta B)\\ & = & \left((A\Delta B)\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\left(\overline{A\Delta B}\right)\right)\\ & = & \left(C\cap\overline{(A\Delta B)}\right)\cup\left((A\Delta B)\cap\overline{C}\right)\\ & = & (C\setminus\ (A\Delta B))\cup((A\Delta B)\ \setminus C)\\ & = & C\Delta\,(A\Delta B)\end{array}$$

■ *Montrons que* : $A\Delta\varnothing = A$

$$A\Delta\varnothing = (A\setminus\varnothing)\cup(\varnothing\setminus A) = A\cup\varnothing = A$$

■ *Montrons que* : $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C)$.

$$\begin{array}{rcl}(A\cap C)\,\Delta\,(B\cap C) & = & \left((A\cap C)\cap\left(\overline{B\cap C}\right)\right)\cup\left((B\cap C)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)\right)\\ & = & \left((A\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)\right)\cup\left((B\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)\right)\\ & = & \left(\left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{C}\right)\right)\cup\left(\left(B\cap C\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap C\cap\overline{C}\right)\right)\\ & = & \left(A\cap C\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap C\cap\overline{A}\right)\\ & = & \left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right)\cap C\\ & = & (A\Delta B)\cap C\end{array}$$

□

Produit cartésien

Définition 40 *Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien**, noté $E\times F$, est l'ensemble des couples (x,y) où $x\in E$ et $y\in E$.*

Exemple 41 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y)\,/\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

Exemple 42 *Soient $E=\{a,b,c\}$ et $F=\{1,2,3\}$. Cherchons $E\times F$.*

$$E\times F = \{(a,1)\,;(a,2)\,;(a,3)\,;(b,1)\,;(b,2)\,;(b,3)\,;(c,1)\,;(c,2)\,;(c,3)\}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com