Les applications

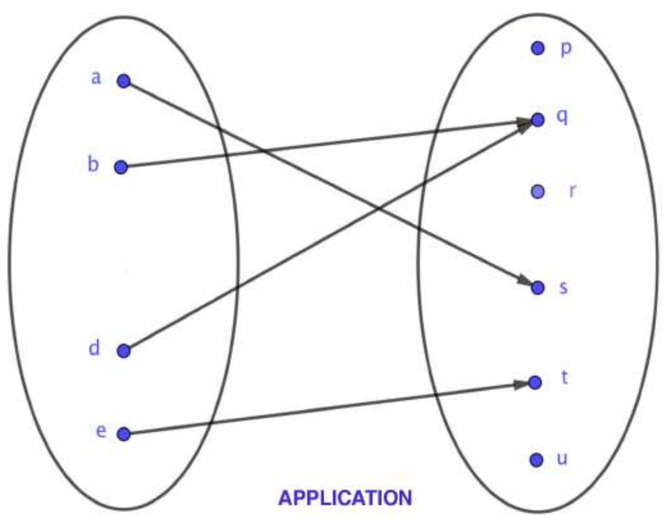
Généralités sur les applications

Définition d'une application

Définition 1 *Soit f une fonction d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F.*
f est une application de E vers F si et seulement si tout élément de l'ensemble de départ E a une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée F par f.

Avec des quantificateurs, cela donne
Soit f une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F.

$$f \quad application \iff (\forall x \in E), ((\exists! y \in F) / \quad y = f(x))$$



Remarque 2 *L'ensemble des applications de E vers F se note $A(E,F)$ ou plus fréquemment F^E.*

Égalité de deux applications

Définition 3 *Deux applications $f, g : E \longrightarrow F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.*

Image directe, image réciproque d'une partie par une application

Image directe

Définition 4 *Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F.*

Soit A une partie de E. L'image directe de la partie A par l'application f, notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A par f.

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Avec des quantificateurs, cela donne :
Soient E et F deux ensembles non vides puis $f \in F^E$. Soit $A \subset E$.

$$(\forall y \in F), \forall y \in f(A) \iff \exists x \in A / y = f(x)$$

Exemple 5 *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 + 2x \end{array}$$

Montrer que : $f([-1,1]) = [-1,3]$.
On montre les doubles inclusions.

■ $\subset$) *Soit* $y \in f([-1,1])$ *,il existe x de $[-1,1]$ tel que $f(x) = y$.*

On a :

$$f(x) = x^2 + 2x = \left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 = (x+1)^2 - 1$$

comme $-1 \leq x \leq 1$, *alors :* $0 \leq x + 1 \leq 2$, *donc :* $-1 \leq (x+1)^2 - 1 \leq 3$.

Donc : $y \in [-1,3]$, *c'est-à-dire :* $f([-1,1]) \subset [-1,3]$.

■ $\supset$) *Soit* $y \in [-1,3]$. *Résolvons l'équation* $f(x) = y$ *dans* $[-1,1]$.

Soit $x \in [-1,1]$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & y \iff x^2 + 2x = y \\ & \iff & (x+1)^2 = y + 1 \\ & \iff & x + 1 = \sqrt{y+1} \quad , \quad x + 1 \geq 0 \quad et \quad y + 1 \geq 0 \\ & \iff & x = \sqrt{y+1} - 1 \end{array}$$

comme $y \in [-1,3]$, *alors :* $-1 \leq \sqrt{y+1} - 1 \leq 1$, *d'où :* $y \in f([-1,1])$. *Ce qui siginfie que :* $[-1,3] \subset f([-1,1])$.

Finalement :

$$f([-1,1]) = [-1,3]$$

Exemple 6 *On considère deux ensembles non vides E et F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

Soient A et B deux éléments de $P(E)$.
Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

- *Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.*

  Puisque $A \subset B$, on a $x \in B$ donc $f(x) \in f(B)$, c'est-à-dire : $y \in f(B)$. Donc :

$$f(A) \subset f(B)$$

Théorème 7 *Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F.*

1. $\forall (A, B) \in (P(E))^2,\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $\forall (A, B) \in (P(E))^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration 8 .

1. *On procède par double inclusion.*

   ■ *Soit $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.*
   Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$. Si $x \notin A$, c'est alors que $x \in B$ et donc $y \in f(B)$.
   Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A) \cup f(B)$.

   ■ *Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $x \in A \cup B$ et donc $y \in f(A \cup B)$.*
   Si $y \notin f(A)$, alors y est nécessairement dans $f(B)$ et il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Or dans ce cas, on a aussi $x \in A \cup B$ et de fait $y \in f(A \cup B)$.
   Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A \cup B)$. D'où

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

2. *Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.*

   Comme $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ ce qui signifie que $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire $y \in f(A)$. De même $x \in B$, ce qui signifie que $f(x) \in f(B)$ c'est-à-dire $y \in f(B)$.

   Donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, alors $y \in f(A) \cap f(B)$. D'où

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

□

Image réciproque

Définition 9 *Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F. Soit B une partie de F. L'image réciproque de la partie B par l'application f, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / \ f(x) \in B\}$$

Avec des quantificateurs, cela donne
Soient E et F deux ensembles non vides puis $f \in F^E$. Soit $B \subset F$.

$$(\forall x \in E),\ x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Exemple 10 *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

Montrer que : $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$.

■ *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rcl} x & \in & f^{-1}([-1,1]) \iff f(x) \in [-1,1] \\ & \iff & -1 \leq f(x) \leq 1 \\ & \iff & -1 \leq \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1 \\ & \iff & \left| \dfrac{2x}{x^2+1} \right| \leq 1 \\ & \iff & \dfrac{|2x|}{x^2+1} \leq 1 \\ & \iff & 2|x| \leq x^2+1 \\ & \iff & 0 \leq (|x|-1)^2 \\ & \iff & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Donc

$$f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$$

Exemple 11 *On considère deux ensembles non vides E et F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

Soient A et B deux éléments de $P(E)$.

Montrer que si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

■ *Soit $x \in f^{-1}(A)$, alors $f(x) \in A$ et comme $A \subset B$ donc : $f(x) \subset B$, Ceci signifie que : $x \in f^{-1}(B)$.*

Donc

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$$

Théorème 12 *Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F.*

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
2. $\forall A \in P(F)$, $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$
3. $\forall (A,B) \in (P(F))^2$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $\forall (A,B) \in (P(F))^2$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Démonstration 13 *.*

1. *Immédiat.*

2. *Soit* $A \subset F$. *Soit* $x \in E$.

$$x \in f^{-1}\left(\overline{A}\right) \iff f(x) \in \overline{A} \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in \overline{f^{-1}(A)}$$

3. *Soient* A *et* B *deux parties de* F. *Soit* $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

4. *Soient* A *et* B *deux parties de* F. *Soit* $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

□

Exemple 14 *Soient* E *et* F *deux ensembles non vides puis* f *une application de* E *vers* F.

1. $\forall A \in P(E), \ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $\forall B \in P(F), \ f(f^{-1}(B)) \subset B$.

■ *Soit* A *une partie de* E. *Soit* $x \in E$.

$$x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$$

■ *Soit* $B \in P(F)$.*Soit* $x \in f(f^{-1}(B))$, *il existe* $y \in f^{-1}(B)$ *tel que* $x = f(y)$.
Comme $y \in f^{-1}(B)$ *donc* $f(y) \in B$, *c'est-à-dire* $x \in B$.

Injections, Surjections, Bijections

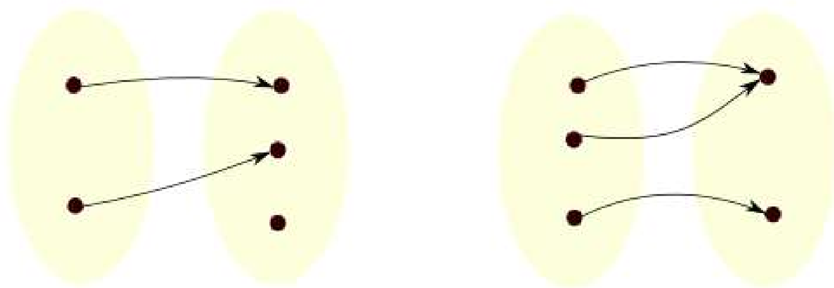
Injection (ou applications injectives)

Définition 15 *Soit f une application d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F.*

*f est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a **au plus** un antécédent dans E par f (c'est-à-dire soit pas d'antécédent, soit exactement un antécédent).*

Avec les quantificateurs, cela donne

$$f \text{ injective} \iff \big(\forall\,(x,y)\in E^2,\ f(x)=f(y) \implies x=y\big)$$



Une application injective   Une application non injective

Exemple 16 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]1,+\infty[& \longrightarrow &]2,+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x-1} \end{array}$$

Montrer que l'application f est injective.

■ *Soit* $(x,y)\in(]1,+\infty[)^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(y) \implies \dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2y}{y-1} \\ & \implies & 2x(y-1)=2y(x-1) \\ & \implies & 2xy-2x=2yx-2y \\ & \implies & x=y \end{array}$$

Ceci signifie que l'application f est injective.

Remarque 17 .

$$f \text{ non injective} \iff \exists\,(x,y)\in E^2, f(x)=f(y) \text{ et } x\neq y$$

Exemple 18 *On considère l'application :*

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

Montrer que f n'est pas injective.
$f(1) = 0 = f(2)$ *mais* $1 \neq 2$. *Ceci signifie que l'application f n'est donc pas injective.*

Exemple 19 *On considère l'application :*

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sqrt{x^2 - x} \end{array}$$

Montrer que f est injective.

■ *Soit* $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(y) \implies x + \sqrt{x^2 - x} = y + \sqrt{y^2 - y} \\ & \implies & \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{y^2 - y}\right)^2 = (y - x)^2 \\ & \implies & \left(x^2 - x\right) - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + \left(y^2 - y\right) = y^2 - 2yx + x^2 \\ & \implies & -x - y - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + 2yx = 0 \\ & \implies & -x + yx - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} - y + yx = 0 \\ & \implies & x\,(y-1) - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + y\,(x - 1) = 0 \\ & \implies & \sqrt{x^2\,(y-1)^2} - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + \sqrt{y^2\,(x-1)^2} = 0 \\ & \implies & \left(\sqrt{x\,(y-1)} - \sqrt{y\,(x-1)}\right)^2 = 0 \\ & \implies & \sqrt{x\,(y-1)} = \sqrt{y\,(x-1)} \\ & \implies & x = y \end{array}$$

Ceci signifie que l'application f est injective.

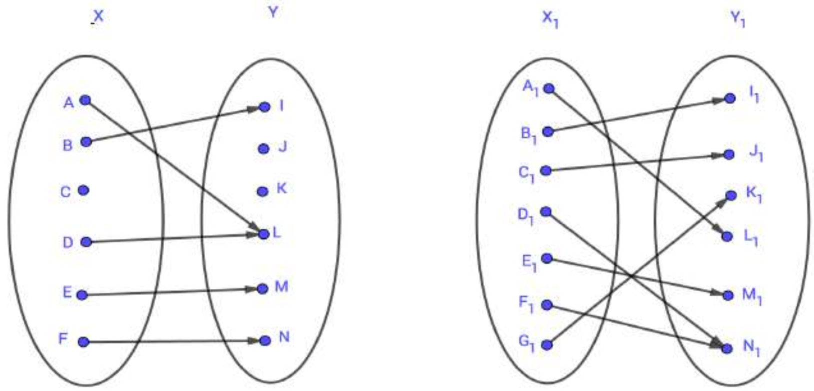
Surjection (ou applications surjectives)

Définition 20 *Soit f une application d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F.*

f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a ***au moins*** *un antécédent dans E par f.*

Avec des quantificateurs, cela donne

$$f \ \ surjectives \iff \forall y \in F,\ \exists x \in E /\ y = f(x)$$



Fonction non surjective,
des éléments de Y n'ont pas d'antécédents

Fonction surjective,
tous les éléments de Y_1 ont un antécédent

Exemple 21 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccl} f & : &]1,+\infty[& \longrightarrow &]2,+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x-1} \end{array}$$

Montrer que f est surjective.

■ *Soit $y \in \left]2,+\infty\right[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\left]1,+\infty\right[$.*

Soit $x \in \left]1,+\infty\right[$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Longleftrightarrow & \dfrac{2x}{x-1} = y \\ & \Longleftrightarrow & 2x = y\left(x-1\right) \ , \quad \left(x - 1 \neq 0 \ \ \textit{pour } x \succ 1\right) \\ & \Longleftrightarrow & 2x - yx = -y \\ & \Longleftrightarrow & x\left(2-y\right) = -y \\ & \Longleftrightarrow & x = \dfrac{y}{y-2} \quad , \quad \left(y-2 \neq 0\right) \end{array}$$

Comme $\frac{y}{y-2} \succ 1$ c'est-à-dire $\frac{y}{y-2} \in \left]1,+\infty\right[$, alors l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\left]1,+\infty\right[$. Ceci signifie que f est surjective.

Exemple 22 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,1] \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-2x+2} \end{array}$$

Montrer que f est surjective.

■ *Soit $y \in \left]0,1\right]$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & y \iff \dfrac{1}{x^2-2x+2} = y \\ & \iff & 1 = \left(x^2-2x+2\right) y \quad , \left(x^2-2x+2 \neq 0 \quad pour\ x \in \mathbb{R}\ \right) \\ & \iff & yx^2 - 2xy + 2y - 1 = 0 \end{array}$$

Le discriminant Δ *de l'équation est :*

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & b^2 - 4ac \\ & = & (-2y)^2 - 4 \times y \times (2y-1) \\ & = & 4y\,(1-y) \end{array}$$

on a $0 \prec y \leq 1$, *alors :* $0 \leq 1-y \prec 1$ *donc :* $\Delta \geq 0$.

donc l'équation $f(x) = y$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}$. *Ceci signifie que l'application* f *est surjective.*

Théorème 23 *Soient* E *et* F *deux ensembles non vides puis* f *une application de* E *vers* F.

$$f \text{ est surjective} \iff f\,(E) = F$$

Démonstration 24 .

Voir la série d'exercices.

Exemple 25 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f(x) \geq -3$, *l'application* f *est-elle surjective ? Justifier.*

■ *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

On étudie le signe de $f\,(x) + 3$ *sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f\,(x) + 3 & = & x^2 + 4x + 1 + 3 \\ & = & x^2 + 4x + 4 \\ & = & (x+2)^2 \end{array}$$

pour tout x *de* $\mathbb{R}$ *on a :* $(x+2)^2 \geq 0$. *Donc*

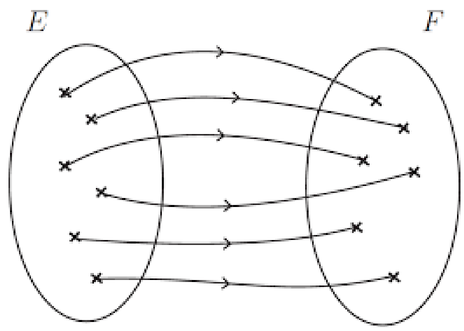
$$(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f(x) \geq -3$$

L'application f *n'est pas surjective, car* -4 *n'a pas d'antécédent par* f.

Bijections, réciproque d'une bijection

Définition 26 *Soit f une application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F.*

f est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a ***un et un seul*** *antécédent dans* ***E*** *par f.*



Exemple 27 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}\backslash\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

Montrer que f est bijective.

■ *Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.*

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Longleftrightarrow & \dfrac{x+1}{x-2} = y \\ & \Longleftrightarrow & x+1 = y(x-2) \quad , \quad (x-2 \neq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}) \\ & \Longleftrightarrow & x+1 = yx - 2y \\ & \Longleftrightarrow & x - yx = -2y - 1 \\ & \Longleftrightarrow & x(1-y) = -2y-1 \\ & \Longleftrightarrow & x = \dfrac{2y+1}{y-1} \quad , \quad (y-1 \neq 0\ ) \end{array}$$

On a : $\frac{2y+1}{y-1} \neq 2$, en effet si $\frac{2y+1}{y-1} = 2$ c'est équivaut à

$$2y+1 = 2y-2 \Longleftrightarrow 1 = -2 \qquad (absurde)$$

donc, on déduit que $\frac{2y+1}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, ceci signifie que f est bijective.

Exemple 28 *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} f : & \left[\dfrac{-1}{4}, +\infty\right[& \longrightarrow & \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{5}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}} \end{array}$$

Montrer que f est bijective.

■ *Soit* $y \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$. *Résolvons l'équation* $f(x) = y$ *dans* $\left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$.

Soit $x \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y \\ &\iff \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y - \frac{5}{2} \\ &\iff x + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 \quad , \quad \left(x + \frac{1}{4} \geq 0 \text{ pour } x \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[\right) \\ &\iff x = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Comme $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$, *c'est-à-dire* $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$ *alors l'équation* $f(x) = y$ *admet une unique solution dans* $\left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$, *ceci signifie que* f *est bijective.*

Théorème 29 *Soient* E *et* F *deux ensembles non vides puis* f *une application de* E *vers* F.

f *est bijective si et seulement si* f *est injective et surjective.*

Exemple 30 *On considère l'application* :

$$\begin{aligned} f \quad : \quad]1, +\infty[&\longrightarrow]2, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

Montrer que f *est bijective.*

■ *On a d'après les exemples précédents que l'application* f *est injective et surjective, ceci signifie d'après le théorème ci-dessus que l'application* f *est bijective.*

Quand $f : E \to F$ est bijective, pour chaque y de F, il existe un et un seul élément x de E tel que $f(x) = y$. On peut alors définir l'application de F vers E qui, à chaque y de F, associe l'unique élément x de E tel que $y = f(x)$:

Définition 31 *Soit* f *une application bijective d'un ensemble non vide* E *sur un ensemble non vide* F. *La* ***réciproque*** *de* f *est l'application notée* f^{-1} *définie par*

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Exemple 32 *Soit l'application*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad [2, +\infty[&\longrightarrow [1, +\infty[\\ x &\longmapsto x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Montrer que f *est bijective et donner* f^{-1}.

■ *Soit* $y \in [1,+\infty[$. *Résolvons l'équation* $f(x) = y$ *dans* $[2,+\infty[$.

Soit $x \in [2,+\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff x^2 - 4x + 5 = y \\ &\iff \left(x^2 - 4x + 4\right) + 1 = y \\ &\iff (x-2)^2 = y - 1 \\ &\iff |x-2| = \sqrt{y-1} \\ &\iff x = 2 + \sqrt{y-1} \end{aligned}$$

comme $2 + \sqrt{y-1} \geq 2$ *c'est-à-dire* $2 + \sqrt{y-1} \in [2,+\infty[$ *ceci signifie que* f *est une application bijective. Sa réciproque est l'application* f^{-1} *définie par :*

$$\begin{array}{rcrcl} f^{-1} & : & [1,+\infty[& \longrightarrow & [2,+\infty[\\ & & x & \longmapsto & 2+\sqrt{x-1} \end{array}$$

Théorème 33 *Soient* E *et* F *deux ensembles non vides et* f *une application de* E *dans* F. *Si* f *est bijective, alors* f^{-1} *est bijective et* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Composition des applications

Définition 34 *Soient* E, F *et* G *trois ensembles non vides. Soient* f *une application de* E *vers* F *et* g *une application de* F *vers* G.

La ***composée*** *des applications* g *et* f , *notée* $g \circ f$, *est l'application de* E *vers* G *définie par*

$$\forall x \in E, \;\; (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 35 *Considèrons les deux applications*

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcrcl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Pour tout réel x, *on a*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x+1)^2$$

et

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1$$

Remarque 36 .

1. *En général*
$$g \circ f \neq f \circ g$$

2. *Soit E un ensemble non vide.* ***L'identité*** *de E est l'application de E dans lui-même définie par :*
$$\forall x \in E, \quad Id_E(x) = x$$

Théorème 37 *Soient E, F, G et H quatre ensembles non vides. Soient $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$.*

1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

2. $Id_F \circ f = f$ *et* $f \circ Id_E = f$.

Remarque 38 .

1. *Soit E un ensemble non vide puis f est une application de E dans E. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*
$$\underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ facteurs}} = f^n$$

2. *En générale*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (f \circ g)^n \neq f^n \circ g^n$$

Fonction indicatrice (ou caractéristique) d'une partie

Définition 39 *Soit E est un ensemble non vide et A une partie donnée de E. Pour $x \in E$, on pose*
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Restriction, prolongement

Définition 40 *Soit f une application de E vers F.*

- *Soit A une partie non vide de E* ***la restriction de*** *f* ***à*** *A, notée $f_{/A}$, est l'application :*
$$\begin{array}{rccc} f_{/A}: & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- *Soit $E \subset E'$ on dit qu'une application g de E' vers F est un* ***prolongement*** *de f à E' si $g_{/E} = f$.*

Exemple 41 .

■ *Soit f l'application*

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3\left|1-x^2\right|+x \end{array}$$

On considère la restriction de l'application f sur $[-1,1]$, par

$$\begin{array}{rrcl} f_{\diagup[-1,1]} : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -3x^2+x+3 \end{array}$$

■ *Soit f l'application*

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

On considère l'application g le prolongement de f à $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com