

Les applications

Généralités sur les applications

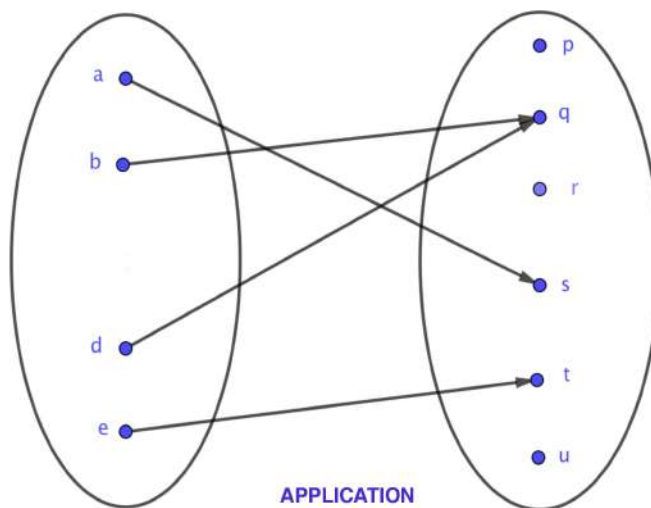
Définition d'une application

Définition 1 Soit f une fonction d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F .
 f est une application de E vers F si et seulement si tout élément de l'ensemble de départ E a une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée F par f .

Avec des quantificateurs, cela donne

Soit f une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F .

$$f \text{ application} \iff (\forall x \in E), ((\exists! y \in F) / y = f(x))$$



Remarque 2 L'ensemble des applications de E vers F se note $A(E, F)$ ou plus fréquemment F^E .

Égalité de deux applications

Définition 3 Deux applications $f, g : E \longrightarrow F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

Image directe, image réciproque d'une partie par une application

Image directe

Définition 4 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F .

Soit A une partie de E . L'image directe de la partie A par l'application f , notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A par f .

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

Avec des quantificateurs, cela donne :

Soient E et F deux ensembles non vides puis $f \in F^E$. Soit $A \subset E$.

$$(\forall y \in F), \forall y \in f(A) \iff \exists x \in A / y = f(x)$$

Exemple 5 Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 2x \end{aligned}$$

Montrer que : $f([-1, 1]) = [-1, 3]$.

On montre les doubles inclusions.

■ \subset) Soit $y \in f([-1, 1])$, il existe x de $[-1, 1]$ tel que $f(x) = y$.

On a :

$$f(x) = x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

comme $-1 \leq x \leq 1$, alors : $0 \leq x + 1 \leq 2$, donc : $-1 \leq (x + 1)^2 - 1 \leq 3$.

Donc : $y \in [-1, 3]$, c'est-à-dire : $f([-1, 1]) \subset [-1, 3]$.

■ \supset) Soit $y \in [-1, 3]$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $[-1, 1]$.

Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff x^2 + 2x = y \\ &\iff (x + 1)^2 = y + 1 \\ &\iff x + 1 = \sqrt{y + 1}, \quad x + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad y + 1 \geq 0 \\ &\iff x = \sqrt{y + 1} - 1 \end{aligned}$$

comme $y \in [-1, 3]$, alors : $-1 \leq \sqrt{y + 1} - 1 \leq 1$, d'où : $y \in f([-1, 1])$. Ce qui signifie que : $[-1, 3] \subset f([-1, 1])$.

Finalement :

$$f([-1, 1]) = [-1, 3]$$

Exemple 6 On considère deux ensembles non vides E et F . Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Soient A et B deux éléments de $P(E)$.

Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

- Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $A \subset B$, on a $x \in B$ donc $f(x) \in f(B)$, c'est-à-dire : $y \in f(B)$. Donc :

$$f(A) \subset f(B)$$

Théorème 7 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F .

1. $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Démonstration 8 .

1. On procède par double inclusion.

■ Soit $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$. Si $x \notin A$, c'est alors que $x \in B$ et donc $y \in f(B)$.

Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A) \cup f(B)$.

■ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $x \in A \cup B$ et donc $y \in f(A \cup B)$.

Si $y \notin f(A)$, alors y est nécessairement dans $f(B)$ et il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Or dans ce cas, on a aussi $x \in A \cup B$ et de fait $y \in f(A \cup B)$.

Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A \cup B)$. D'où

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

2. Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ ce qui signifie que $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire $y \in f(A)$.

De même $x \in B$, ce qui signifie que $f(x) \in f(B)$ c'est-à-dire $y \in f(B)$.

Donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, alors $y \in f(A) \cap f(B)$. D'où

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

□

Image réciproque

Définition 9 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F . Soit B une partie de F . L'image réciproque de la partie B par l'application f , notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f .

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Avec des quantificateurs, cela donne

Soient E et F deux ensembles non vides puis $f \in F^E$. Soit $B \subset F$.

$$(\forall x \in E), x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Exemple 10 Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Montrer que : $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.

■ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}([-1, 1]) \iff f(x) \in [-1, 1] \\ &\iff -1 \leq f(x) \leq 1 \\ &\iff -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \\ &\iff \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1 \\ &\iff \frac{|2x|}{x^2 + 1} \leq 1 \\ &\iff 2|x| \leq x^2 + 1 \\ &\iff 0 \leq (|x| - 1)^2 \\ &\iff x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc

$$f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$$

Exemple 11 On considère deux ensembles non vides E et F . Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Soient A et B deux éléments de $P(E)$.

Montrer que si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

■ Soit $x \in f^{-1}(A)$, alors $f(x) \in A$ et comme $A \subset B$ donc : $f(x) \in B$, Ceci signifie que : $x \in f^{-1}(B)$.

Donc

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).$$

Théorème 12 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F .

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $\forall A \in P(F), f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$
3. $\forall (A, B) \in (P(F))^2, f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4. $\forall (A, B) \in (P(F))^2, f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Démonstration 13 .

1. Immédiat.

2. Soit $A \subset F$. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(\overline{A}) \iff f(x) \in \overline{A} \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in \overline{f^{-1}(A)}$$

3. Soient A et B deux parties de F . Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

4. Soient A et B deux parties de F . Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

□

Exemple 14 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F .

1. $\forall A \in P(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. $\forall B \in P(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

■ Soit A une partie de E . Soit $x \in E$.

$$x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$$

■ Soit $B \in P(F)$. Soit $x \in f(f^{-1}(B))$, il existe $y \in f^{-1}(B)$ tel que $x = f(y)$.

Comme $y \in f^{-1}(B)$ donc $f(y) \in B$, c'est-à-dire $x \in B$.

Injections, Surjections, Bijections

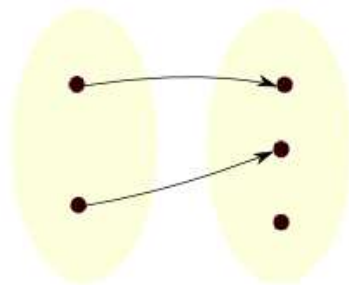
Injection (ou applications injectives)

Définition 15 Soit f une application d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F .

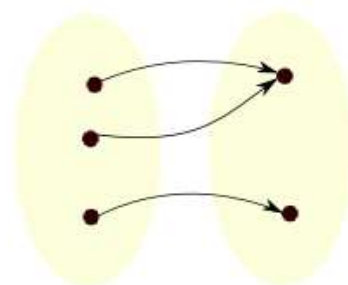
f est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a **au plus** un antécédent dans E par f (c'est-à-dire soit pas d'antécédent, soit exactement un antécédent).

Avec les quantificateurs, cela donne

$$f \text{ injective} \iff (\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y)$$



Une application injective



Une application non injective

Exemple 16 On considère l'application :

$$\begin{aligned} f &:]1, +\infty[\longrightarrow]2, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

Montrer que l'application f est injective.

■ Soit $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \implies \frac{2x}{x-1} = \frac{2y}{y-1} \\ \implies 2x(y-1) &= 2y(x-1) \\ \implies 2xy - 2x &= 2yx - 2y \\ \implies x &= y \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'application f est injective.

Remarque 17 .

$$f \text{ non injective} \iff \exists (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$$

Exemple 18 On considère l'application :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Montrer que f n'est pas injective.

$f(1) = 0 = f(2)$ mais $1 \neq 2$. Ceci signifie que l'application f n'est donc pas injective.

Exemple 19 On considère l'application :

$$\begin{aligned} f &:]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \sqrt{x^2 - x} \end{aligned}$$

Montrer que f est injective.

■ Soit $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies x + \sqrt{x^2 - x} = y + \sqrt{y^2 - y} \\ &\implies \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{y^2 - y}\right)^2 = (y - x)^2 \\ &\implies (x^2 - x) - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + (y^2 - y) = y^2 - 2yx + x^2 \\ &\implies -x - y - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + 2yx = 0 \\ &\implies -x + yx - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} - y + yx = 0 \\ &\implies x(y - 1) - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + y(x - 1) = 0 \\ &\implies \sqrt{x^2(y - 1)^2} - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + \sqrt{y^2(x - 1)^2} = 0 \\ &\implies \left(\sqrt{x(y - 1)} - \sqrt{y(x - 1)}\right)^2 = 0 \\ &\implies \sqrt{x(y - 1)} = \sqrt{y(x - 1)} \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'application f est injective.

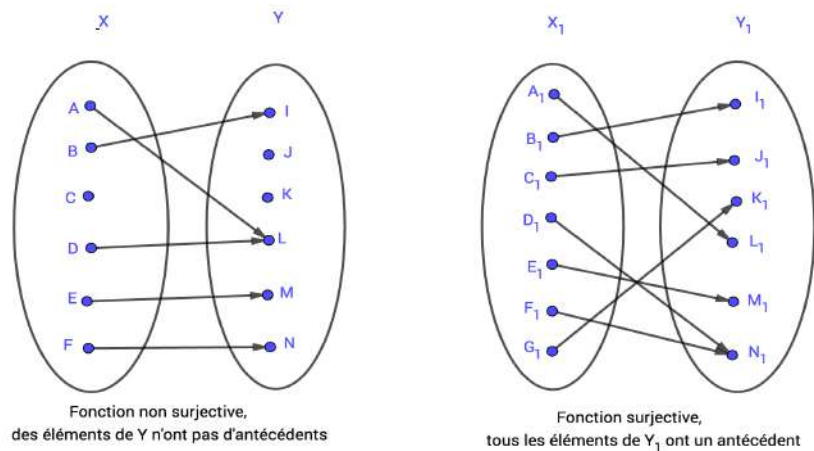
Surjection (ou applications surjectives)

Définition 20 Soit f une application d'un ensemble non vide E vers un ensemble non vide F .

f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a **au moins** un antécédent dans E par f .

Avec des quantificateurs, cela donne

$$f \text{ surjectives} \iff \forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$$



Exemple 21 On considère l'application :

$$f :]1, +\infty[\longrightarrow]2, +\infty[$$

$$x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$$

Montrer que f est surjective.

■ Soit $y \in]2, +\infty[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $]1, +\infty[$.

Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$f(x) = y \iff \frac{2x}{x-1} = y$$

$$\iff 2x = y(x-1), \quad (x-1 \neq 0 \text{ pour } x > 1)$$

$$\iff 2x - yx = -y$$

$$\iff x(2-y) = -y$$

$$\iff x = \frac{y}{y-2}, \quad (y-2 \neq 0)$$

Comme $\frac{y}{y-2} > 1$ c'est-à-dire $\frac{y}{y-2} \in]1, +\infty[$, alors l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $]1, +\infty[$. Ceci signifie que f est surjective.

Exemple 22 On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1]$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

Montrer que f est surjective.

■ Soit $y \in]0, 1]$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = y \\ &\iff 1 = (x^2 - 2x + 2)y, \quad (x^2 - 2x + 2 \neq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}) \\ &\iff yx^2 - 2xy + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2y)^2 - 4 \times y \times (2y - 1) \\ &= 4y(1 - y) \end{aligned}$$

on a $0 < y \leq 1$, alors : $0 \leq 1 - y < 1$ donc : $\Delta \geq 0$.

donc l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans \mathbb{R} . Ceci signifie que l'application f est surjective.

Théorème 23 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F .

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F$$

Démonstration 24 .

Voir la série d'exercices.

Exemple 25 On considère l'application :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \geq -3$, l'application f est-elle surjective ? Justifier.

■ Soit $x \in \mathbb{R}$.

On étudie le signe de $f(x) + 3$ sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} f(x) + 3 &= x^2 + 4x + 1 + 3 \\ &= x^2 + 4x + 4 \\ &= (x + 2)^2 \end{aligned}$$

pour tout x de \mathbb{R} on a : $(x + 2)^2 \geq 0$. Donc

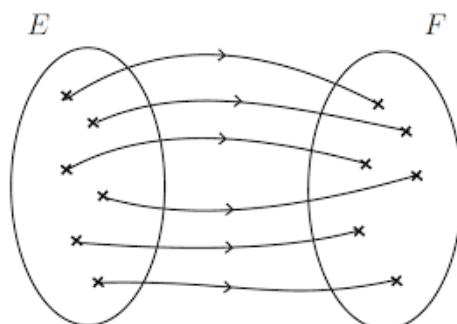
$$(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \geq -3$$

L'application f n'est pas surjective, car -4 n'a pas d'antécédent par f .

Bijections, réciproque d'une bijection

Définition 26 Soit f une application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F .

f est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a **un et un seul** antécédent dans E par f .



Exemple 27 On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$$

Montrer que f est bijective.

■ Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff \frac{x+1}{x-2} = y \\ \iff x+1 &= y(x-2) \quad , \quad (x-2 \neq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) \\ \iff x+1 &= yx-2y \\ \iff x-yx &= -2y-1 \\ \iff x(1-y) &= -2y-1 \\ \iff x &= \frac{2y+1}{y-1} \quad , \quad (y-1 \neq 0) \end{aligned}$$

On a : $\frac{2y+1}{y-1} \neq 2$, en effet si $\frac{2y+1}{y-1} = 2$ c'est équivalent à

$$2y+1 = 2y-2 \iff 1 = -2 \quad (\text{absurde})$$

donc, on déduit que $\frac{2y+1}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ceci signifie que f est bijective.

Exemple 28 On considère l'application :

$$f : \left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[\longrightarrow \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[$$

$$x \longmapsto \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

Montrer que f est bijective.

■ Soit $y \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$.

Soit $x \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y \\ &\iff \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y - \frac{5}{2} \\ &\iff x + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2, \quad \left(x + \frac{1}{4} \geq 0 \text{ pour } x \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[\right) \\ &\iff x = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Comme $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$ alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\left[\frac{-1}{4}, +\infty\right[$, ceci signifie que f est bijective.

Théorème 29 Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F .

f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

Exemple 30 On considère l'application :

$$\begin{aligned} f &:]1, +\infty[\longrightarrow]2, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective.

■ On a d'après les exemples précédents que l'application f est injective et surjective, ceci signifie d'après le théorème ci-dessus que l'application f est bijective.

Quand $f : E \rightarrow F$ est bijective, pour chaque y de F , il existe un et un seul élément x de E tel que $f(x) = y$. On peut alors définir l'application de F vers E qui, à chaque y de F , associe l'unique élément x de E tel que $y = f(x)$:

Définition 31 Soit f une application bijective d'un ensemble non vide E sur un ensemble non vide F . La **réciproque** de f est l'application notée f^{-1} définie par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Exemple 32 Soit l'application

$$\begin{aligned} f &: [2, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[\\ x &\longmapsto x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Montrer que f est bijective et donner f^{-1} .

■ Soit $y \in [1, +\infty[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $[2, +\infty[$.

Soit $x \in [2, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) &= y \iff x^2 - 4x + 5 = y \\ &\iff (x^2 - 4x + 4) + 1 = y \\ &\iff (x - 2)^2 = y - 1 \\ &\iff |x - 2| = \sqrt{y - 1} \\ &\iff x = 2 + \sqrt{y - 1} \end{aligned}$$

comme $2 + \sqrt{y - 1} \geq 2$ c'est-à-dire $2 + \sqrt{y - 1} \in [2, +\infty[$ ceci signifie que f est une application bijective. Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [1, +\infty[&\longrightarrow [2, +\infty[\\ x &\longmapsto 2 + \sqrt{x - 1} \end{aligned}$$

Théorème 33 Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F . Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Composition des applications

Définition 34 Soient E , F et G trois ensembles non vides. Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G .

La **composée** des applications g et f , notée $g \circ f$, est l'application de E vers G définie par

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 35 Considérons les deux applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Pour tout réel x , on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 1)^2$$

et

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1$$

Remarque 36 .

1. En général

$$g \circ f \neq f \circ g$$

2. Soit E un ensemble non vide. **L'identité** de E est l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad Id_E(x) = x$$

Théorème 37 Soient E, F, G et H quatre ensembles non vides. Soient $f \in F^E, g \in G^F$ et $h \in H^G$.

1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

2. $Id_F \circ f = f$ et $f \circ Id_E = f$.

Remarque 38 .

1. Soit E un ensemble non vide puis f est une application de E dans E . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ facteurs}} = f^n$$

2. En générale

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (f \circ g)^n \neq f^n \circ g^n$$

Fonction indicatrice (ou caractéristique) d'une partie

Définition 39 Soit E est un ensemble non vide et A une partie donnée de E . Pour $x \in E$, on pose

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Restriction, prolongement

Définition 40 Soit f une application de E vers F .

• Soit A une partie non vide de E **la restriction de f à A** , notée $f|_A$, est l'application :

$$\begin{aligned} f|_A: A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

■ Soit $E \subset E'$ on dit qu'une application g de E' vers F est un **prolongement** de f à E' si $g|_E = f$.

Exemple 41 .

■ Soit f l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3|1 - x^2| + x \end{aligned}$$

On considère la restriction de l'application f sur $[-1, 1]$, par

$$\begin{aligned} f|_{[-1,1]} &: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -3x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

■ Soit f l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

On considère l'application g le prolongement de f à \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com