Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Résumé Limites

Fonctions élémentaires

Limite en $+\infty$ et $-\infty$

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{5}{x}$	$-5x^3$	$5x^3$	$-8x^4$	$8x^4$
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$	*n pair* $+\infty$ *n impair* $-\infty$	0	non défini	non défini	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\succ 0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\prec 0}} f(x)$	*n pair* $+\infty$ *n impair* $-\infty$	non défini

Exemple 1 *Calculer la limite suivante :* $\lim\limits_{x\longrightarrow-2}\frac{2x-1}{x+2}$.

On détermine le signe de l'expression : $x+2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

Comme : $\lim\limits_{x\longrightarrow-2} 2x-1=-5$. *Donc, on déduit :*

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow-2\\ x\succ-2}}\frac{2x-1}{x+2}=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\longrightarrow-2\\ x\prec-2}}\frac{2x-1}{x+2}=+\infty$$

Opérations sur les limites et formes indéterminée

Somme de fonctions

$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Produit de fonctions

$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell \succ 0$	$\ell \succ 0$	$\ell \prec 0$	$\ell \prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} (fg)(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Quotient de fonctions

$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$\ell' \succ 0$	$\ell' \prec 0$	$\ell' \succ 0$	$\ell' \prec 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

Polynômes et fonctions rationnelles

Fonction polynôme

Règle 2 *Un polynôme a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus haut degré.*

Si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} a_nx^n$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} a_nx^n$

Exemple 3 :

- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^4-2x^3+x^2+x-1=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^4=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^4-2x^3+x^2+x-1=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^4=+\infty$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -3x^2-2x-1=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -3x^2=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} -3x^2-2x-1=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} -3x^2=-\infty$

Fonction rationnelle

Règle 4 *Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.*

Si

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}\ ,\ alors\ :$$
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\quad et\quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Exemple 5 :

- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3x-x^2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{x}=0.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)x^3+x^2+1}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1-\sqrt{2}}{2}x=+\infty$, *car* : $1-\sqrt{2}\prec 0.$

Limite d'une fonction irrationnelle

Règle 6 :

- *Si* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\ell\geq 0,$ *alors* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$
- *Si* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty,$ *alors* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

Exemple 7 *Calculer les limites suivantes* :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+x+3}\quad,\quad\lim_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x$$

- *On a* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^2+x+3=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x^2=+\infty.$ *Donc* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty.$
- *On a* : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}2x=-\infty.$ *Donc* : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x=$ $"+\infty-\infty"$ $(F.I)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2x\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2x\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)=-\infty
\end{aligned}$$

Limites trigonométriques

Règle 8

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin x}{x}=1\quad,\quad\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\tan x}{x}=1\quad et\quad\lim_{x\longrightarrow0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\frac{a}{b}\quad,\quad\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\tan(ax)}{bx}=\frac{a}{b}\quad et\quad\lim_{x\longrightarrow0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

Exemple 9 *Calculer les limites suivantes* :

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\cos(2x)-\cos(4x)}{x^2}\quad,\quad\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}\quad,\quad\lim_{x\longrightarrow0}\frac{x^2}{\cos x-\cos^2 x}$$

- $$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\cos(2x)-\cos(4x)}{x^2} &= \lim_{x\longrightarrow0}\frac{\cos(2x)-1-\cos(4x)+1}{x^2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow0}\frac{-(1-\cos(2x))+(1-\cos(4x))}{x^2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow0}-\frac{1-\cos(2x)}{x^2}+\frac{1-\cos(4x)}{x^2}\\
&= -\frac{4}{2}+\frac{16}{2}=6.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{1-\cos x}\times\frac{1}{\tan x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\times x^2}\times\frac{1}{\tan x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\times|x|\times\frac{1}{\tan x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\times\frac{1}{\frac{\tan x}{|x|}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\succ 0}}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad et\quad \lim_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\prec 0}}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2}{\cos x-\cos^2 x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2}{\cos x\,(1-\cos x)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\\ &= 1\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=2\end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com