Algèbre linéaire : les applications linéaire – exercices

Exercice 01

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- $f_1(x,y,z,t) = (x - z + 2t, 2z - x + 2t - 3y, y + z - 2t + 3)$
- $f_2(x,y,z) = (2x + 3yz, x - 2y, z - x)$
- $f_4(P) = P'$, où $P \in P_n(\mathbb{R})$ et P′ son polynôme dérivé

Exercice 02

Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,-1,3)$, $v_3 = (0,3,-1)$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(v_1) = (0,-2,3)$ et $f(v_2) = (-2,1,1)$

- Calculer $f(2,2,2)$ et $f(v_3)$

Exercice 03

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ par :

$$f(x,y,z,t) = (-3y + 2z + t, x + 3t, x - y + z + 3t, y - z)$$

- Trouver Imf et $Kerf$

Exercice 04

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que

$$f(2,0,\alpha) = (-3\alpha, 2, 1)\,, f(1,1,-1) = (2,-1,1) \; et \; f(3,0,-1) = (3,3,3)$$

1. A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, ces trois relations définissent-elles f ?
2. Pour $\alpha = -\frac{1}{3}$, donner l'image d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 05

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x - y - 2z; 3x - 2y + z)$$

Et soient $v_1 = (1, 1, -2)$; $v_2 = (0, 1, -1)$ et $v_3 = (3, 1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur base canonique
3. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^3$ est muni de la base v et $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique.
4. Écrire la matrice de f quand $\mathbb{R}^3$ est muni de la base v et $\mathbb{R}^2$ de la base $w = \{w_1, w_2\}$ avec $w_1 = (1, 1)$ et $w_2 = (-1, 2)$

Exercice 06

Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée, par rapport aux bases canoniques, est donnée par :

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 07

Soit f l'application linaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_2 - x_3, x_1 + 2x_4)$$

1. Déterminer $Kerf$ et Imf.
2. Donner la matrice A associée à f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4 et$ $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice B associée à f quand $\mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique et $\mathbb{R}^3$ est muni de la base $w = \{w_1, w_2, w_3\}$, avec : $w_1 = (1, 1, 0)$; $w_2 = (-1, 0, 2)$; $w_3 = (1, 1, -1)$
4. Connaissant la matrice B, retrouver l'application f.