Les applications linéaires – correction des exercices

Exercice 01

- f_1 n'est pas linéaire car elle ne vérifie pas la condition nécessaire $f(0) = 0$, puisque dans ce cas, on a $f(0,0,0,0) = (0,0,3)$.
- f_2 n'est pas linéaire, en effet, si $C = (x, y, z)$.

$$f(2X) = f(2x, 2y, 2z) = 2(2x + 6yz, x - 2y, z - x) \neq 2f(X)$$

- f_4 est linéaire, en effet, $\forall P \in P_n(\mathbb{R}), \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f_4(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q' = \alpha f_4(P) + \beta f_4(Q)$$

Exercice 02

- Pour calculer $f(2,2,2)$, il suffit de remarquer que $(2,2,2) = 2v_1$ et donc

$$f(2,2,2) = f(2v_1) = 2f(v_1) = 2(0,-2,3) = (2,-4,6)$$

- Pour calculer $f(v_3)$, connaissant uniquement $f(v_1)\ et\ f(v_2)$, il faudrait pouvoir exprimer v_3 en fonction de v_1 et v_2. On voit facilement que $v_3 = 2v_1 - v_2$. (Dans le cas où la relation n'apparaît pas de manière évidente, on cherche des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$). On a

$$v_3 = 2v_1 - v_2 \Rightarrow f(v_3) = f(2v_1 - v_2) = 2f(v_1) - f(v_2) = (2,-4,6) - (-2,1,1) = (4,-5,5)$$

Exercice 03

Connaître les sous-espaces vectoriels Imf et $Kerf$ revient à en déterminer une base.

- Imf est l'ensemble des $f(x,y,z,t), (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$f(x,y,z,t) = (-3y + 2z + t, x + 3t, x - y + z + 3t, y - z)$$

$$= x(0,1,1,0) + y(-3,0,-1,1) + z(2,0,1,-1) + t(1,3,3,0)$$

Imf est donc engendré par les 4 vecteurs

$v_1 = (0,1,1,0)$; $v_2 = (-3,0,-1,1)$; $v_3 = (2,0,1,-1)\ et\ v_4 = (1,3,3,0)$

Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4=0 \Longrightarrow \begin{cases} -3\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_1+3\lambda_4=0 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4=0 \\ \lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-3\lambda_4 \\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4 \end{cases}$$

La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est liée, par exemple, en prenant $\lambda_4=1$, on obtient :

$$v_4=3v_1-v_2-v_3$$

Le vecteur v_4 étant lui-même combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3, on peut « **l'éliminer** » et Imf est alors engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$. Vérifions que cette famille est libre :

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0 \Longrightarrow \begin{cases} -3\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre et génératrice, donc c'est une base de Imf et $DimImf=3$

- $Kerf$ est l'ensemble engendré par une seule vecteur

$$f(x,y,z,t)=0 \Leftrightarrow (-3y+2z+t, x+3t, x-y+z+3t, y-z)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y+2z+t=0 \\ x+3t=0 \\ x-y+z+3t=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=z=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Kerf=\{(-3t,t,t,t): t\in\mathbb{R}\}$$

$Kerf$ est donc le sous-espaces vectoriel engendré par le vecteur $(-3,1,1,1)$ qui en est une base (Noter que tout vecteur non nul est libre), $DimKerf=1$ (Le théorème des dimensions est bien vérifié : $DimImf+DimKerf=4$)

Exercice 04

a. On sait qu'une application linéaire est complètement définie si on connaît l'image d'une base de l'espace de départ ; les trois relations définissent f si les vecteurs $v_1=(2,0,\alpha)$; $v_2=(1,1,-1)$; $v_3=(3,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de chercher α pour que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit libre :

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ \lambda_2=0 \\ \alpha\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2=0 \\ \lambda_3=\alpha\lambda_1 \\ (2+3\alpha)\lambda_1=0 \end{cases}$$

Si $\alpha\neq-\frac{2}{3}$, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Pour $\alpha = -\frac{1}{3}$, f est bien définie et si $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche ses composantes (a, b, c) dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ en fonction de x, y et z :

$$(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$$

$$= a\left(2, 0, -\frac{1}{3}\right) + b(1, 1, -1) + c(3, 0, -1)$$

$$= (2a + b + 3c, b, -\frac{a}{3} - b - c)$$

D'où

$$\begin{cases} x = 2a + b + 3c \\ y = b \\ -\frac{a}{3} - b - c = z \end{cases} \Longrightarrow a = x + 2y + 3z, b = y, c = -\frac{x + 5y + 6z}{3}$$

C'est-à-dire

$$(x, y, z) = (x + 2y + 3z)v_1 + yv_2 - \frac{x + 5y + 6z}{3}v_3$$

Et $$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)f(v_1) + yf(v_2) - \frac{x+5y+6z}{3}f(v_3)$$

$$= (x + 2y + 3z)(1, 2, 1) + y(2, -1, 1) - \frac{x + 5y + 6z}{3}(3, 3, 3)$$

D'où

$$f(x, y, z) = (-y - 2z, x - 2y, -2y - 3z)$$

(Pour vérifier nos calculs, on peut retrouver grâce cette expression, les valeurs des $f(v_1)$)

Exercice 05

a. Nous avons trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, pour former une base, il suffit de vérifier qu'il sont libres.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$v = \{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b. La matrice de f est obtenue en écrivant en colonnes les composantes de l'image de la base de départ dans la base d'arrivée. Appelons $\varepsilon_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 3)\ ; f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, -2)\ ; f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-2, 1)$$

D'où $$M_1 = (f, \varepsilon_3, \varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Pour trouver $M_2(f, v, \varepsilon_2)$, on calcule les composantes de la base v dans la base ε_2 :

$f(v_1) = f(1,1,-2) = (4,-1)$; $f(v_2) = f(0,1,-1) = (1,-3)$; $f(v_3) = f(3,1,0) = (2,7)$.

D'où $$M_2(f, v, \varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

d. Pour trouver $M_3(f, v, w)$, on calcule les composantes de la base v dans la base w :

$f(v_1) = (4,-1) = 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $f(v_2) = (1,-3) = \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2$; $f(v_3) = (2,7) = 2\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2$.

Or, $$w_1 = (1,1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$w_2 = (-1,2) = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$

D'où $$\varepsilon_2 = \frac{w_1 + w_2}{3}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2w_1 - w_2}{3}$$

Et $$f(v_1) = 4\frac{2w_1 - w_2}{3} - \frac{w_1 + w_2}{3} = \frac{7}{3}w_1 - \frac{5}{3}w_2$$

$$f(v_2) = \frac{2w_1 - w_2}{3} - 3\frac{w_1 + w_2}{3} = -\frac{1}{3}w_1 - \frac{4}{3}w_2$$

$$f(v_3) = 2\frac{2w_1 - w_2}{3} + 7\frac{w_1 + w_2}{3} = \frac{11}{3}w_1 + \frac{5}{3}w_2$$

Enfin $$M_3(f, v, w) = \begin{bmatrix} 7/3 & -1/3 & 11/3 \\ -5/3 & -4/3 & 5/3 \end{bmatrix} = 1/3\begin{bmatrix} 7 & -1 & 11 \\ -5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 06

On sait que tout vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique

$$X = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Et $$f(X) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \qquad (f \text{ linéaire})$$

Or $f(1,0,0) = (-1,0,1)$; $f(0,1,0) = (2,2,-1)$ *et* $f(0,0,1) = (0,1,-3)$

D'où $$f(X) = (-x, 0, x) + (2y, 2y, -y) + (0, z, -3z)$$

$$= (2y - x, 2y + z, x - y - 3z)$$

L'application linéaire cherchée est donnée par

$$f(x, y, z) = (2y - x, 2y + z, x - y - 3z).$$

Exercice 07

a.

- $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Kerf \Leftrightarrow f(X) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2 + x_4, x_2 - x_3, x_1 + 2x_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 4x_2 \ , x_3 = x_2 \ , x_4 = -2x_2$$

$$\Leftrightarrow X = (4x_2, x_2, x_2, -2x_2) = x_2(4, 1, 1, -2)$$

Donc $Kerf$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(4, 1, 1, -2)$ et $DimKerf = 1$

- $Y = (y_1, y_2, y_3) \in Imf \Leftrightarrow \exists X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $Y = f(X)$

$$\Leftrightarrow Y(x_1 - 2x_2 + x_4, x_2 - x_3, x_1 + 2x_4)$$

$$= x_1(1, 0, 1) + x_2(-2, 1, 0) + x_3(0, -1, 0) + x_4(1, 0, 2)$$

$$= x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$$

La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ engendre Imf et cette famille est nécessairement liée puisque $Imf \subset \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $DimImf \leq 3$. D'autre part, d'après le théorème des dimensions, on a $DimImf = Dim\mathbb{R}^4 - DimKerf = 3$. Vérifions que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre :

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(-2, 1, 0) + \lambda_3(0, -1, 0) = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 - 2\lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Imf est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ avec $DimKerf = 3 = Dim\mathbb{R}^3$ donc $Imf = \mathbb{R}^3$ et f est surjective.

b. Appelons $\varepsilon_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\ et\ \varepsilon_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, les colonnes de A sont les composantes de $f(e_1); f(e_2); f(e_3); f(e_4)$ dans la base ε_4.

$$f(e_1) = (1, 0, 1); f(e_2) = (-2, 1, 0); f(e_3) = (0, -1, 0)\ et\ f(e_4) = (1, 0, 2)$$

D'où $$A = M(f\ ;\ \varepsilon_4, \varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Les colonnes de B sont les composantes des vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ dans la base w. On a

$$f(e_1) = (1,0,1)\ ;\ f(e_2) = (-2,1,0)\ ;\ f(e_3) = (0,-1,0)\ et\ f(e_4) = (1,0,2)\ ,$$

C'est-à-dire $\quad f(e_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3\ ;\ f(e_2) = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\ ;\ f(e_3) = -\varepsilon_2\ ;\ f(e_4) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$

Or $\quad w_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\ ;\ w_2 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3\ ;\ w_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3\ ;$

D'où $\quad \varepsilon_1 = 2w_1 - w_2 - 2w_3\ ;\ \varepsilon_2 = -w_1 + w_2 + 2w_3\ ;\ \varepsilon_3 = w_1 - w_3$

Enfin $\quad f(e_1) = 3w_1 - w_2 - 3w_3\ ; f(e_2) = -5w_1 + 3w_2 + 6w_3\ ;$

$$f(e_3) = w_1 - w_2 - 2w_3\ ; f(e_4) = 4w_1 - w_2 - 4w_3$$

La matrice associée à f aux bases ε_4 de $\mathbb{R}^4$ et w de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$B = M(f\ ;\ \varepsilon_4, w) = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

d. Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$f(X) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) + x_4 f(e_4)$$

$$= x_1(3w_1 - w_2 - 3w_3) + x_2(-5w_1 + 3w_2 + 6w_3) + x_3(w_1 - w_2 - 2w_3) + x_4(4w_1 - w_2 - 4w_3)$$

$$= (3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4)w_1 + (-x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4)w_2 + (-3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4)w_3$$

Or $\quad w_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\ ;\ w_2 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3\ ;\ w_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3\ ;$

D'où $\quad f(X) = (3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (-x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4)(-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) + (-3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$

$$= (x_1 - 2x_2 + x_4)\varepsilon_1 + (x_2 - x_3)\varepsilon_2 + (x_1 + 2x_4)\varepsilon_3$$

On retrouve bien

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_2 - x_3, x_1 + 2x_4)$$