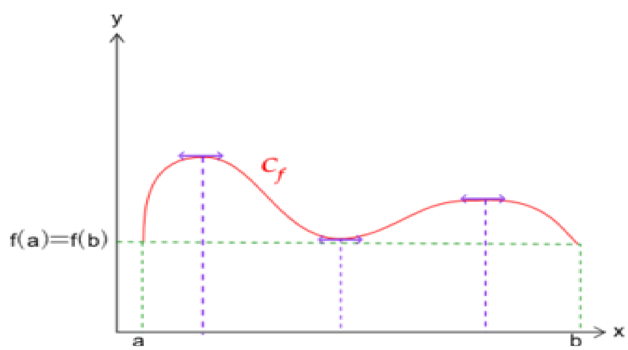
Théorème de Rolle– Théorème des accroissement finis

Théorème de Rolle

Théorème 1 (*Théorème de Rolle*)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- f *est continue sur* $[a,b]$,
- f *est dérivable sur* $]a,b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in \,]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.



Remarque 2 *Il existe au moins un point du graphe de* f *où la tangente est horizontale.*

Démonstration 3 .

- *Si* f *est constante sur* $[a,b]$ *alors n'importe quel* $c \in \,]a,b[$ *convient.*
- *Sinon il existe* $x_0 \in [a,b]$, *tel que :* $f(x_0) \neq f(a)$. *Supposons que* $f(x_0) \succ f(a)$. *Alors* f *est continue sur l'intervalle fermé et borné* $[a,b]$, *donc elle admet un maximum en un point* $c \in [a,b]$. *Comme* $f(c) \geq f(x_0) \succ f(a)$ *donc* $c \neq a$. *De même comme* $f(a) = f(b)$ *alors* $c \neq b$. *Ainsi* $c \in \,]a,b[$. *En* c , f *est dérivable et admet un maximum (local) donc* $f'(c) = 0$. $\square$

Remarque 4 !!
Dire que f *a un maximum local en* c *signifie que* $f(c)$ *est la plus grande des valeurs* $f(x)$ *pour les* x *proches de* c . *On dit que* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *admet un maximum global en* c *si pour toutes les autres valeurs* $f(x)$, $x \in I$, *on a* $f(x) \leq f(c)$ *(on ne regarde donc pas seulement les* $f(x)$ *pour* x *proche de* c *). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.*

Voir le cours sur les fonctions numériques. $(TCSI)$.

Remarque 5 *Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Considèrons la fonction $f : x \longmapsto e^{ix}$.*

Exemple 6 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On pose :*

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))\, x^3 - \left(b^3 - a^3\right) f(x)$$

1. *Montrer que φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in\,]a,b[$.*

2. *Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. En déduire qu'il existe $c \in\,]a,b[$ tel que :*

$$3c^2 (f(b) - f(a)) = \left(b^3 - a^3\right) f'(c)$$

- *Les fonctions $x \longmapsto x^3$ et f sont continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ donc φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

  Pour tout $x \in\,]a,b[$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left((f(b) - f(a))\, x^3 - \left(b^3 - a^3\right) f(x)\right)' \\ &= 3x^2 (f(b) - f(a)) - \left(b^3 - a^3\right) f'(x) \end{aligned}$$

- *On a : $\varphi(a) = a^3 f(b) - b^3 f(a)$ et $\varphi(b) = -b^3 f(a) + a^3 f(b)$. Donc : $\varphi(a) = \varphi(b)$.*

  D'après la question 1, la fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\,]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} \varphi'(c) &= 0 \iff 3c^2 (f(b) - f(a)) - \left(b^3 - a^3\right) f'(c) \\ &\iff 3c^2 (f(b) - f(a)) = \left(b^3 - a^3\right) f'(c) \end{aligned}$$

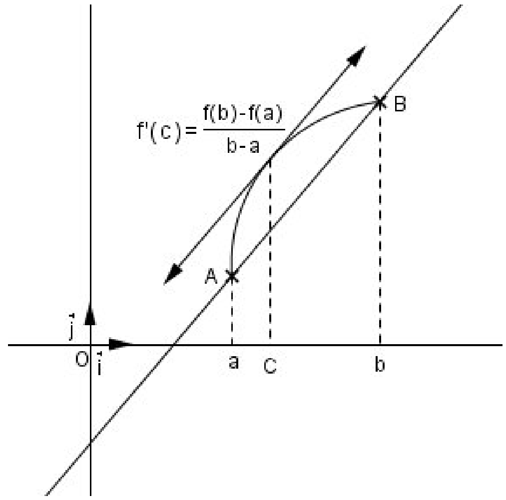
Le théorème des accroissements finis

Théorème 7 (*égalité des accroissements finis*)
Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si

- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*

alors il existe un réel $c \in\,]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Remarque 8 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *est le coefficient directeur de la droite joignant les points* $A\,(a, f\,(a))$ *et* $B\,(b, f\,(b))$ *et* $f'(c)$ *est le coefficient directeur de la tangente* (T) *à* (C_f) *au point d'abscisse* c*. L'égalité* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ *se traduit par le fait que les droites* (AB) *et* (T) *sont parallèles.*

Démonstration 9 *Pour* $x \in [a, b]$*, posons* $h(x) = f(x) - g(x)$ *où* g *est une fonction affine telle que pour tout* x *de* $[a, b]$*, on a :*

$$g(x) = f\,(a) + \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a}\,(x - a)$$

La fonction h *est continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$ *et vérifie* $h\,(a) = h\,(b) = 0$*. D'après le théorème de Rolle, il existe* $c \in\,]a, b[$ *tel que* $h'(c) = 0$ *ou encore tel que :*

$$f'(c) = \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a}$$

□

Théorème 10 (*inégalité des accroissements finis*)
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, dérivable sur* I*.*

1. *Si il existe deux réels* m *et* M *tels que, pour tout réel* x *de* I*,* $m \leq f'(x) \leq M$*, alors pour tout* $(a, b) \in I^2$ *tel que* $a \neq b$*,* $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$*.*
2. *S'il existe un réel* M *tel que, pour tout réel* x *de* I*,* $|f'(x)| \leq M$*, alors pour tout* $(a, b) \in I^2$ *tel que* $a \neq b$*,* $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$*.*

Démonstration 11 *.*

- *Soit* $(a, b) \in I^2$ *tel que* $a \prec b$*.* f *est dérivable sur* I *et en particulier,* f *est continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$*. Par hypothèse,* $m \leq f'\,(c) \leq M$ *et donc*

$$m \leq \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a} \leq M.$$

- *Pour tout x de I, on a: $-M \leq f'(x) \leq M$. D'après 1), pour tout (a,b) de I^2 tel que $a \neq b$, on a $-M \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$ ou encore $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$. On en déduit que $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.* $\square$

Exemple 12 .

1. *Montrer que pour tout x et y deux réels on a :*

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

2. *Montrer que pour tout $x \succ 0$ on a :*

$$\frac{x}{1+x} \prec \ln(1+x) \prec x$$

- *Pour $x \neq y$. La fonction $\sin$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$ si $x \prec y$ (ou sur $[y,x]$ si $y \prec x$). Il existe $c \in]x,y[$ (ou $c \in]y,x[$) tel que*

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos c$$

Ce qui équivaut à

$$\sin x - \sin y = (x - y)\cos c$$

On prend la valeur absolue, on obtient :

$$|\sin x - \sin y| = |x - y| |\cos c|$$

Comme $|\cos c| \leq 1$, alors

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

- *La fonction $f : t \longmapsto \ln(1+t)$ est continue est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0,x]$. Il existe $c \in]0,x[$ tel que*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c)$$

Donc

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

Comme $c \in]0,x[$, alors :

$$0 \prec c \prec x \iff 1 \prec 1+c \prec 1+x \iff \frac{1}{1+x} \prec \frac{1}{1+c} \prec 1 \iff \frac{x}{1+x} \prec \frac{x}{1+c} \prec x$$

On en déduit que :

$$\frac{x}{1+x} \prec \ln(1+x) \prec x$$

Exercices

Exercice 13 *Soient p un entier $p \geq 2$.*

1. *Montrer en utilisant le théorème des accroissement finis qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]0,1[$ tel que :*

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln p) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$

2. *En déduire l'inégalité :*

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln p) \prec \frac{1}{p\ln p}$$

3. *Démontrer que :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + ... + \frac{1}{n\ln n} \right) = +\infty$$

- *Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction*

$$f_p(x) = \ln(\ln(p+x))$$

sur $[0,1]$.

Vérifions que cette fonction vérifie les hypothèses

$$\begin{aligned} 0 \leq & \; x \leq 1 \iff p \leq x+p \leq 1+p \\ \iff & \; \ln p \leq \ln(x+p) \leq \ln(1+p) \\ \iff & \; \ln(\ln p) \leq \ln(\ln(x+p)) \leq \ln(\ln(1+p)) \quad \textit{car}: \;\; \ln p \geq \ln 2 \end{aligned}$$

Ceci signifie que la fonction f_p est défini et continue sur $[0,1]$, et qu'elle est dérivable sur $[0,1]$ donc d'après le théorème des accroissements finis sur $[0,1]$. Il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$\frac{f_p(1) - f_p(0)}{1-0} = f'(c)$$

Donc

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln p) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$

- *Comme* $p+c \succ p$ *et* $\ln(p+c) \succ \ln p$. *Donc* : $(p+c)\ln(p+c) \succ p\ln p$, *ensuite* : $\frac{1}{(p+c)\ln(p+c)} \prec \frac{1}{p\ln p}$, *ceci signifie que :*

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln p) \prec \frac{1}{p\ln p}$$

- $$\begin{aligned}\ln(\ln(3)) - \ln(\ln 2) &\prec \frac{1}{2\ln 2}\\ \ln(\ln(4)) - \ln(\ln 3) &\prec \frac{1}{3\ln 3}\\ &\vdots\\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln) &\prec \frac{1}{n\ln n}\end{aligned}$$

  En faisant la somme de ces $n-1$ inégalités, et on obtient :

  $$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \prec \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + ... + \frac{1}{n\ln n}$$

  comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) = +\infty,$ *alors :*

  $$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + ... + \frac{1}{n\ln n}\right) = +\infty$$

Exercice 14 .

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction* ln *sur l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que :*

   $$\frac{1}{n+1} \prec \ln(n+1) - \ln(n) \prec \frac{1}{n}$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

   $$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, on suppsoe que f est dérivable sur $]a,b[$, et que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \succ 0$.*

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com