Correction de la série d'exercices sur les fonctions numériques

Exercice 1 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :*

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

1. *Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{3}{2}$:*
   Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{3}{2}\iff\frac{1}{2}\leq f(x)\quad et\quad f(x)\leq\frac{3}{2}$$

donc, il suffit de montrer que $f(x)\leq\frac{3}{2}$ et $f(x)\geq\frac{1}{2}$, on étudie pour cela le signe de leurs différences c'est-à-dire : $f(x)-\frac{3}{2}$ et $f(x)-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}f(x)-\frac{3}{2}&=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{3}{2}\\&=\frac{2(x^2+x+1)-3(x^2+1)}{2(x^2+1)}\\&=\frac{2x^2-3x^2+2x+2-3}{2(x^2+1)}\\&=\frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)}\\&=\frac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)}\\&=\frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

comme $2(x^2+1)\succ 0$ et $-(x+1)^2\leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, alors : $f(x)-\frac{3}{2}\leq 0$. Donc $f(x)\leq\frac{3}{2}$
D'autre part, calculons la différence : $f(x)-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}f(x)-\frac{1}{2}&=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\\&=\frac{2(x^2+x+1)-(x^2+1)}{2(x^2+1)}\\&=\frac{2x^2+2x+2-x^2-1}{2(x^2+1)}\\&=\frac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)}\\&=\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

comme $2(x^2+1) \succ 0$ *et* $(x+1)^2 \geq 0$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$*, alors :* $f(x) - \frac{1}{2} \geq 0$*. Donc* $f(x) \geq \frac{1}{2}$*.*

Donc, puisque $f(x) \leq \frac{3}{2}$ *et* $f(x) \geq \frac{1}{2}$ *alors on conclut que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$$

2. *Soient* x *et* y *deux éléments distincts de* $\mathbb{R}$*, calculons :* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{\frac{x^2+x+1}{x^2+1} - \frac{y^2+y+1}{y^2+1}}{x-y} \\
&= \frac{\frac{(x^2+x+1)(y^2+1)-(x^2+1)(y^2+y+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}}{x-y} \\
&= \frac{x^2y^2+x^2+xy^2+x+y^2+1-(x^2y^2+x^2y+x^2+y^2+y+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\
&= \frac{x^2y^2+x^2+xy^2+x+y^2+1-x^2y^2-x^2y-x^2-y^2-y-1}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\
&= \frac{x-y+xy^2-x^2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\
&= \frac{(x-y)-xy(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\
&= \frac{(x-y)(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)} \\
&= \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)}
\end{aligned}$$

3. *La monotonie sur les intervalles :* $[-1,1]$, $[1,+\infty[$ *et* $]-\infty,-1]$.

- *Soient* $x \in [-1,1]$ *et* $y \in [-1,1]$ *tels que :* $x \neq y$.

  On a $-1 \leq x \leq 1$ *et* $-1 \leq y \leq 1$*, donc* $|x| \leq 1$ *et* $|y| \leq 1$*, alors :* $|xy| \leq 1$*.*

  Ce qui signifie que : $-1 \leq xy \leq 1$*, ensuite :* $-1 \leq -xy \leq 1$ *donc :* $0 \leq 1-xy \leq 2$*.*
  D'où : $1-xy \geq 0$*.*

  D'autre part, on a $(x^2+1)(y^2+1) \succ 0$*.*

  Donc :

  $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$$

  Ce qui signifie que la fonction f *est croissante sur* $[-1,1]$.

- *Soient* $x \in [1,+\infty[$ *et* $y \in [1,+\infty[$ *tels que :* $x \neq y$.

  On a $x \geq 1$ *et* $y \geq 1$ *donc :* $xy \geq 1$*, et comme* $x \neq y$ *alors* $xy \succ 1$ *c'est-à-dire* $-xy \prec -1$*. Ce qui signifie que :* $1-xy \prec 0$*.*

  D'autre part, on a $(x^2+1)(y^2+1) \succ 0$*.*

Donc :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \prec 0$$

Ce qui signifie que la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

- *Soient $x \in]-\infty, -1]$ et $y \in]-\infty, -1]$ tels que : $x \neq y$.*

  On a $x \leq -1$ et $y \leq -1$ donc : $xy \succ 1$, et comme $x \neq y$ alors $-xy \prec -1$. Ce qui signifie que : $1 - xy \prec 0$.

  D'autre part, on a $(x^2 + 1)(y^2 + 1) \succ 0$.

  Donc :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \prec 0$$

  Ce qui signifie que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$.

4. *Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.*

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f		$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	

Exercice 2 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :*

$$f(x) = \frac{x\,|x|}{x^2 + 4}$$

1. *Cherchons D_f :*

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \underbrace{x^2 + 4 \neq 0}_{toujours\ vérifiée} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. *La parité de la fonction f :*

- *Pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$.*
- *Soit $x \in D_f$. Calculons $f(-x)$:*

$$f(-x) = \frac{-x\,|-x|}{(-x)^2 + 4} = \frac{-x\,|x|}{x^2 + 4} = -f(x)$$

  Donc, la fonction f est impaire.

  La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^+$, calculons : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{\frac{x^2}{x^2+4}-\frac{y^2}{y^2+4}}{x-y} \\
&= \frac{\frac{x^2(y^2+4)-y^2(x^2+4)}{(x^2+4)(y^2+4)}}{x-y} \\
&= \frac{x^2y^2+4x^2-y^2x^2-4y^2}{(x^2+4)(y^2+4)(x-y)} \\
&= \frac{4(x-y)(x+y)}{(x^2+4)(y^2+4)(x-y)} \\
&= \frac{4(x+y)}{(x^2+4)(y^2+4)}
\end{aligned}$$

On a $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc : $x+y \geq 0$, et comme $x \neq y$ alors $x+y \succ 0$, de plus : $4\,(x+y) \succ 0$.

D'autre part, on a $(x^2+4)(y^2+4) \succ 0$. Ce qui signifie que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et puisque elle est impaire alors la fonction f est ***strictement croissante sur*** $\mathbb{R}^-$.

4. Tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 3 *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. Cherchons D_f :

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \underbrace{x^2+1 \neq 0}_{\textit{toujours vérifiée}} \right\} \\
&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2. *La parité de la fonction f :*

- *Pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$.*
- *Soit $x \in D_f$. Calculons $f(-x)$:*

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -f(x)$$

Donc, la fonction f est impaire.

3. *Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}$, calculons : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{\frac{x}{x^2+1}-\frac{y}{y^2+1}}{x-y} \\
&= \frac{\frac{x(y^2+1)-y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}}{x-y} \\
&= \frac{x(y^2+1)-y(x^2+1)}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{xy^2+x-yx^2-y}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{-xy(x-y)+(x-y)}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{(x-y)(1-xy)}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)}
\end{aligned}$$

a)

- *La monotonie sur l'intervalle $[1,+\infty[$.*

  Soient $x \in [1,+\infty[$ et $y \in [1,+\infty[$ tels que : $x \neq y$.

  On a $x \geq 1$ et $y \geq 1$ donc : $xy \geq 1$, et comme $x \neq y$ alors : $xy \succ 1$, de plus $-xy \prec -1$, ensuite : $1-xy \prec 0$.

  D'autre part, on a $(x^2+1)(y^2+1) \succ 0$.

  Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$$

  Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

- *La monotonie sur l'intervalle $[0,1]$.*

  Soient $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$ tels que : $x \neq y$.

  On a $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ donc : $0 \leq xy \leq 1$, et comme $x \neq y$ alors : $0 \leq xy \prec 1$, de plus $-1 \prec -xy \leq 0$, ensuite : $1-xy \succ 0$.

  D'autre part, on a $(x^2+1)(y^2+1) \succ 0$.

Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) *Soit $x \in [0,1]$,*

donc $0 \leq x \leq 1$, et comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ alors

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

$f(0)=0$ et $f(1)=\frac{1}{2}$. Ceci signifie que pour tout x de $[0,1]$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

c) *Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.*

La fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$, et puisque elle est impaire alors f est strictement croissante sur $[-1,0]$, de plus, on sait que la fonction f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, et comme elle est impaire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

Donc, on déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
							$1/2$		
f		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	
			$-1/2$						

- *La fonction f admet $\frac{1}{2}$ comme valeur maximale locale en point d'abscisse 1 sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},2\right[$.*
- *La fonction f admet $\frac{-1}{2}$ comme valeur minimale locale en point d'abscisse -1 sur l'intervalle $\left]-2,\frac{-1}{2}\right[$.*

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com