Correction de la série d'exercices sur la dérivabilité

Exercice 1 .

■ *Soit f la fonction définie par :* $f(x)=\sqrt{2-3x}$.

On pose la fonction u définie par $u:x\longmapsto 2-3x$.

u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout sur $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$, *et pour tout x de* $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$: $u(x)\succ 0$. *Donc, la fonction $f=\sqrt{u}$ est dérivable sur* $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$.

Calculons $f'(x)$ pour tout $x\in\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{2-3x}\right)' \\ &= \frac{(2-3x)'}{2\sqrt{2-3x}} \\ &= \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} \end{aligned}$$

■ *Soit g la fonction définie par :* $g(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

On pose la fonction u définie par $u:x\longmapsto\frac{1-x}{1+x}$.

u est une fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition et surtout sur $]-1,1[$, *et pour tout x de* $]-1,1[$: $u(x)\succ 0$. *Donc, la fonction $g=\sqrt{u}$ est dérivable sur* $]-1,1[$.

Calculons $g'(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' \\ &= \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \frac{\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \frac{\frac{-(1+x)-1+x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \\ &= \frac{-2}{2\left(1+x\right)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{-\sqrt{1+x}}{\left(1+x\right)^2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

■ *Soit h la fonction définie par :* $h(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$.

On pose la fonction u définie par : $u : x \longmapsto x^2+2x+3$.

u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$: $u(x) \succ 0$. Donc, la fonction $h = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)' \\ &= \frac{\left(x^2+2x+3\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \\ &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \end{aligned}$$

■ *Soit φ la fonction définie par :* $\varphi(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+2}}$.

La fonction φ s'écrit comme le quotient de deux fonctions $u : x \longmapsto 3x-5$ et $v : x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$.

- *u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.*
  On pose la fonction $w : x \longmapsto x^2+2$.
- *w est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$: $w(x) \succ 0$. Donc la fonction $v = \sqrt{w}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Par suite la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculons $\varphi'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left(\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+2}}\right)' \\ &= \frac{(3x-5)'\sqrt{x^2+2} - (3x-5)\left(\sqrt{x^2+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x^2+2} - (3x-5)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} \\ &= \frac{3\sqrt{x^2+2} - (3x-5)\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} \\ &= \frac{3\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - x(3x-5)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} \\ &= \frac{3x^2+6-3x^2+5x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} \\ &= \frac{5x+6}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt{x^2+2}^3} \end{aligned}$$

Exercice 2 *Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par :*

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x}$$

1. *Calculons :* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

   $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} 2x\sqrt{1-x} = -\infty \quad car \ : \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty \ \ et \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

2. *On cherche l'intervalle de dérivation de la fonction f.*

   La fonction f s'écrit comme le produit de deux fonctions $u : x \longmapsto 2x$ et $v : x \longmapsto \sqrt{1-x}$

   - *u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout sur $]-\infty, 1[$.*
     On pose la fonction $w : x \longmapsto 1 - x$.
   - *h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout sur $]-\infty, 1[$, et pour tout $x \in]-\infty, 1[$: $w(x) \succ 0$. Donc la fonction $v = \sqrt{w}$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$.*

   Par suite, la fonction f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $]-\infty, 1[$.

   Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x\sqrt{1-x}\right)' \\ &= 2\sqrt{1-x} + 2x \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= 2\sqrt{1-x} - \frac{x}{\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2(1-x) - x}{\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

3. *Le tableau de variations de la fonction f :*

   Comme $\sqrt{1-x} \succ 0$, pour tout x de $]-\infty, 1[$ alors le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 1[$ est celui de $2 - 3x$.

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

- $f(\frac{2}{3}) = 2 \times \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, *donc* $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ *est la valeur maximale de la fonction* f *sur* $]-\infty, 1]$ *en point d'absicsse* $\frac{2}{3}$.

Exercice 3 *Soit* f *la fonction définie par :*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

1. **a)**

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/\ x^2 - x - 2 \geq 0\right\}$$

On résout dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Calculons Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 \succ 0$$

L'équation $x^2 - x - 2 = 0$, *admet deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *:*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 2 \quad et \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -1$$

donc

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x2-x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$$

b) *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ *:*

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} x^2 - x - 2 = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. *Donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} = +\infty$.

et $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x^2 - x - 2 = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. *Donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} = +\infty$.

Étudions la dérivailité de la fonction f *en* $x_0 = -1$;

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x+1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x+1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)\sqrt{(x+1)(x-2)}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{(x-2)}{\sqrt{(x+1)(x-2)}} = -\infty
\end{aligned}$$

Étudions la dérivailité de la fonction f en $x_0 = 2$;

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\
= & \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2} \\
= & \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x-2} \\
= & \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)\sqrt{(x+1)(x-2)}} \\
= & \lim_{x\longrightarrow 2^{+-}} \frac{(x+1)}{\sqrt{(x+1)(x-2)}} = +\infty
\end{aligned}$$

2. *Les variations de la fonction f.*

- *En justifiant la dérivabilité de la fonction f.*

  On pose la fonction $u : x \longrightarrow x^2 - x - 2$.

  u est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, et surtout sur $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ et pour tout x de $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$: $u(x) \succ 0$. Donc la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$.

- *Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$,*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{x^2-x-2}\right)' \\
&= \frac{(x^2-x-2)'}{2\sqrt{x^2-x-2}} \\
&= \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}
\end{aligned}$$

comme $2\sqrt{x^2-x-2} \succ 0$ pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, alors le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ est celui de $2x-1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4 .

■ *On montre que :*

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \quad \sin x \leq x$$

On considère la fonction φ *définie sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *par*

$$\varphi(x) = \sin x - x$$

φ *est dérivable sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *comme la somme de deux fonctions dérivables sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $(u : x \longmapsto \sin x$ *et* $v : x \longmapsto -x)$.
Calculons $\varphi'(x)$ *pour tout* x *de* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\varphi'(x) = \cos x - 1$$

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \iff -2 \leq \cos x - 1 \leq 0$$

donc

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] / \ \varphi'(x) \leq 0$$

Donc, la fonction φ *est décroissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *d'où*

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) \Longrightarrow 1 - \frac{\pi}{2} \leq \varphi(x) \leq 0$$

donc pour tout x *de* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x) \leq 0$. *Ce qui signifie que*

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \sin x \leq x$$

■ *On montre que :*

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right), \ x \leq \tan x$$

On considère la fonction ψ *définie sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *par*

$$\psi(x) = x - \tan x$$

ψ *est dérivable sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *comme la somme de deux fonctions dérivables sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $(u : x \longmapsto x$ *et* $v : x \longmapsto -\tan x)$.
Calculons $\psi'(x)$ *pour tout* x *de* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\psi'(x) = -\tan^2 x$$

donc

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[/ \ \psi'(x) \leq 0$$

Donc, la fonction ψ *est décroissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, *d'où*

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow 0 \leq x \prec \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \psi(x) \leq \psi(0) \Longrightarrow \psi(x) \leq 0$$

ce qui signifie que pour tout x *de* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\psi(x) \leq 0$. *Donc*

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right), x \leq \tan x$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com