Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Complément sur la dérivation dans l'ensemble des réels

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Théorème 1 *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors,*

$$f \text{ est constante sur } I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$$

Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 2 *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :*

- *f est croissante (resp. décroissante) sur I, si et seulement si, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.*
- *En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I. (On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes).*

Exemple 3 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^3$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2$$

on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ et comme f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction.

- *on justifie que la fonction est bien dérivable* ;
- *on calcule la dérivée de la fonction ;*
- *on détermine le signe de la dérivée avant de conclure ;*

Exemple 4 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$$

Étudier les variations de la fonction f.

■ *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

étudions le signe de de ce polynôme de degré 2. Son discriminant vaut donc $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times 36 = 36$.

L'équation : $6x^2 - 30x + 36 = 0$ admet donc deux racines réelles distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 - \sqrt{36}}{2 \times 6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 + \sqrt{36}}{2 \times 6} = 3$$

On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

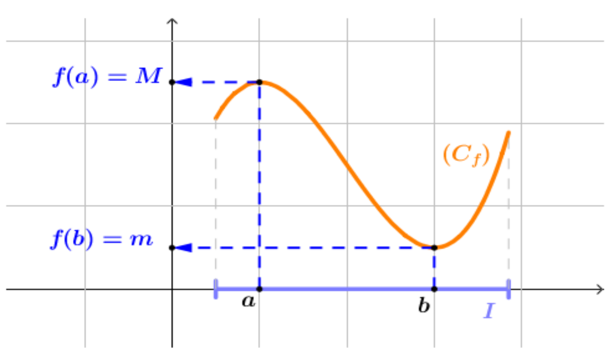
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	34	$\nearrow$	$+\infty$

Extremum d'une fonction

Rappel

Définition 5 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un élément de I.*

1. *On dit que $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.*



2. *On dit que $f(b)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \geq f(b)$ pour tout $x \in I$.*

3. *On dit aussi que m est un extermum de f si c'est un maximum ou un minimum.*

Extremum local

Définition 6 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que pour tout x de $I \cap J$, $f(x) \leq f(x_0)$ $(resp\ f(x) \geq f(x_0))$.*

- *On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.*

Théorème 7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Si f est **dérivable en** x_0 et si f présente un **extremum local** en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Convexité

Dérivée seconde

Définition 8 *Soit une fonction f deux fois dérivable sur I. On appelle dérivée seconde de f, notée f'', la fonction dérivée de f' : $(f')' = f''$.*

Exemple 9 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

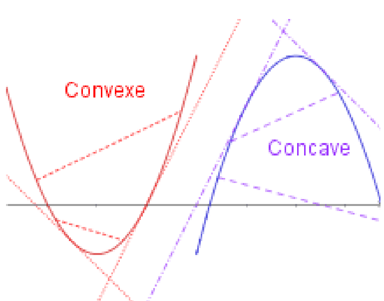
$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$$

La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 12x + 10$$

Propriété 10 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.*

- *f est **convexe** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.*
- *f est **concave** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.*



Exemple 11 *Reprenons :* $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$, *on a :* $f''(x) = 12x + 10$.

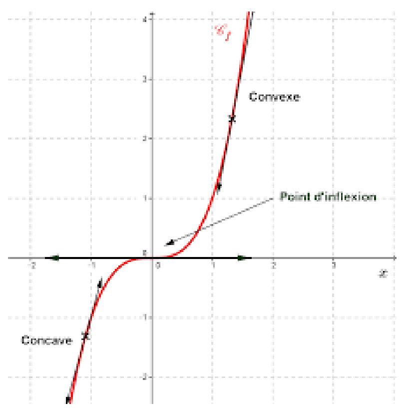
- $f''(x) = 0 \iff 12x + 10 = 0 \iff x = -\frac{5}{6}$. *Donc*

x	$-\infty$		$\frac{-5}{6}$		$+\infty$
$12x+10$		$-$	0	$+$	

- *Sur* $\left]-\infty, \frac{-5}{6}\right]$ *on a* $f'' \leq 0$. *Donc la fonction* f *est concave.*
- *Sur* $\left[\frac{-5}{6}, +\infty\right[$ *on a* $f'' \geq 0$. *Donc la fonction* f *est convexe.*

Point d'inflexion

Définition 12 *Soit* f *une fonction et* (C_f) *sa courbe représentative. Un point d'inflexion de la courbe* (C_f) *est un point où la courbe* (C_f) *traverse sa tangente en ce point. C'est aussi le point où la convexité change de sens.*



Théorème 13 *Soit* f *une fonction deux fois dérivable sur* I *de courbe représentative* (C_f).
Soit $A(a, f(a))$ *un point de* (C_f) *de tangente* (T_a).
Si $f''(a) = 0$ *en changeant de signe alors* (C_f) *admet un point d'inflexion en* A.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com