Devoir Maison N3

Exercice 1 (*Les nombres complexes*)

1. *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :* $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.
2. *On pose :* $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
   - **a)** *Ecrire* a *sous la forme trigonométrique et en déduire que* a^{2020} *est un nombre réel.*
   - **b)** *Déduire les entiers naturels* n *tels que :* $a^n \in \mathbb{R}$.
   - **c)** *Soit le nombre complexe* $b = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. *Montrer que :* $b^2 = a$.
3. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *on considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectives* a, b *et* c *tels que :* $c = 1$. *La rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{8}$ *transforme le point* M *d'affixe* z *au point* M' *d'affixe* z'.
   - **a)** *Vérifier que :* $z' = bz$.
   - **b)** *Déterminer l'image de* C *par la rotation* R *et montrer que* A *est l'image de* B *par* R.
4. **a)** *Montrer que :* $|a - b| = |b - c|$ *et en déduire la nature du triangle* ABC.
   - **b)** *Déterminer une mesure de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$.
5. *Soit* T *la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *et* D *l'image de* A *par* T.
   - **a)** *Vérifier que l'affixe de* D *est* $b^2 + 1$.
   - **b)** *Montrer que :* $\frac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$ *et en déduire que les points* O , B *et* D *sont alignés.*

Exercice 2 *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. *On note* A, B *et* I *les points du plan d'affixes respectives* $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ *et* $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

1. **a)** *Mettre les nombres complexes* z_A *et* z_B *sous la forme exponentielle.*
   - **b)** *Vérifier que* A *et* B *sont deux points du cercle* (C) *de centre* O *et de rayon* 2.
   - **c)** *Vérifier que* I *est le milieu du segment* $[AB]$.
   - **d)** *Construire de manière rigoureuse le cercle* (C) *ainsi que les points* A,B *et* I.
2. **a)** *Justifier que la demi-droite* $[OI)$ *est la bissectrice de l'angle* $\widehat{AOB}$.
   - **b)** *Vérifier que :* $(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.
   - **c)** *Montrer que :* $(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI}}) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$.

d) *En déduire que :* $z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

3. *Donner alors les valeurs exactes de* $\cos(\frac{5\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 3 $(Equations\ différentielles)$

Partie N1 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y' + y = 2e^{-x}$.

dans laquelle y *désigne une fonction inconnue de la variable réelle* x, *dérivable sur* $\mathbb{R}$.

1. *Résoudre l'équation différentielle* $(E') : y' + y = 0$.
2. *Soit la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = 2xe^{-x}$. *Vérifier que* g *est solution de l'équation* (E).
3. *On admet que toute solution* h *de* (E) *s'écrit sous la forme* $f + g$ *ou* f *désigne une solution de l'équation* (E') *et* g *est la fonction ci-dessus.*
   - **a)** *Déterminer la forme des solutions de l'équation* (E).
   - **b)** *Déterminer la solution* h *de l'équation* (E) *vérifiant la condition initiale :* $h(0) = -1$.

Partie N2 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y'' - 3y' + 2y = -1 - 2x$.

dans laquelle y *désigne une fonction inconnue de la variable réelle* x, *définie et deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$. y' *la fonction dérivée de* y *et* y'' *sa fonction dérivée seconde.*

1) *Déterminer les solutions de l'équation différentielle* $(E') : y'' - 3y' + 2y = 0$.

2) *Déterminer les constantes réelles* a *et* b *pour que la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = ax + b$ *soit une solution particulière de l'équation* (E).

3) *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E). $(Indication$: *utiliser la consigne de la question* 3 *partie* $N1)$

4) *Déterminer la solution* f *de* (E) *qui vérifie les conditions initiales :* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 2$.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI