Devoir Maison N°2
Durée : 1H30min
À rendre obligatoirement le : 25/03/2021

Problème d'analyse

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (unité : 2cm).

1. *Montrer que $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.*

   a) *Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.*

   b) *Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty, 2 + \ln 4]$ et an dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4, +\infty[$.*

2. *Montrer que $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

   a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$*

   b) *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

3. *Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de (C).*

4. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2+\ln 3 \prec \alpha \prec 2+\ln 4$, puis en utilisant la méthode de dichotomie déterminer un encadrement de α de longueur $\ln 4 - \frac{\ln 12}{2}$.*

5. *Construire (Δ) et (C) dans le même repére $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (on prend $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$).*

6. **a)** *Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.*

   c) *Justifier puis calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$. (Indication : $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$).*

Exercice 01

A) *Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :*

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

a) *Vérifier que le discrimiant de l'équation (E) est : $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$*

b) *En déduire les solutions de l'équation (E).*

B) *Soient les nombres complexes :* $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) *Vérifier que :* $b\overline{c} = a$, *puis en déduire que* $ac = 4b$.

b) *Ecrire les nombres complexes* b *et* c *sous forme trigonométrique.*

c) *En déduire que :* $a = 4(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

C) *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *on considère les points* B, C *et* D *d'affixes respectives* b, c *et* d *telle que* $d = a^4$. *Soient* z *l'affixe d'un point* M *du plan et* z' *l'affixe de* M' *image de* M *par le rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$.

a) *Vérifier que :* $z' = \frac{1}{4}az$

b) *Déterminer l'image du point* C *par la rotation* R.

c) *Déterminer la nature du triangle* OBC.

d) *Montrer que* $a^4 = 128b$ *et en déduire que les points* O, B *et* D *sont alignés.*

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com